

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

TEMPS D'OCCUPATION ET α -QUANTILES DU MOUVEMENT
BROWNIEN ARITHMÉTIQUE AVEC APPLICATIONS EN
FINANCE MATHÉMATIQUE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

KRISTOFER TZIRITAS

JANVIER 2015

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je voudrais prendre le temps de remercier tous ceux qui m'ont aidé pendant mes études.

Je vais commencer par un grand merci à mon superviseur, Jean-François Renaud, pour tous ses conseils d'orientation ainsi que pour m'avoir présenté plusieurs nouveaux et intéressants parcours intellectuels.

Je tiens également à remercier personnellement M. Boudreault et Oscar Quijano pour leur aide avec mes difficultés de programmation.

Merci aussi à tous mes professeurs d'avoir pris le temps et l'énergie pour créer tous les cours que j'ai suivis tout au long de ma maîtrise, qui m'a permis d'apprendre beaucoup.

Je tiens à remercier l'ensemble du personnel au Département de mathématiques de l'UQAM de fournir un environnement accueillant et encourageant pour l'apprentissage. Merci à Gisèle Legault d'être toujours prête à aider à résoudre les difficultés techniques qui se posent dans le laboratoire du département.

Enfin et surtout, je tiens à remercier toute ma famille pour son soutien inconditionnel tout au long de mes études.

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES NOTATIONS	ix
RÉSUMÉ	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
LES TEMPS D'OCCUPATION POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN AVEC DÉRIVE	9
1.1 La loi de l'arc-sinus de Lévy	10
1.2 La loi de l'arc-sinus généralisée	21
1.2.1 La forme fermée de $\mathbb{P}\left(A_T^{W,+k} \leq t\right)$	30
1.3 La loi du temps d'occupation d'un intervalle	32
CHAPITRE II	
APPLICATIONS DES TEMPS D'OCCUPATION EN FINANCE	37
2.1 Les options escalier	39
2.1.1 Le prix d'une option d'achat escalier exponentielle vers le bas	40
2.1.2 Le prix d'une option de vente escalier vers le bas	51
2.1.3 Réplication dynamique des options escalier	53
2.2 Les options parisiennes cumulatives	58
2.2.1 Le prix d'une option d'achat parisienne cumulative vers le bas	60
2.3 La loi conjointe de $\left(B_T^x, A_T^{B^x,-,0}\right)$	62
2.4 Le prix d'une option avec paiement général $g\left(S_T, A_T^{S,-,b}\right)$	66
2.5 Les options corridor	67
2.5.1 Les options à un swap et à deux swaps	69

CHAPITRE III	
LES α -QUANTILES POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN ARITHMÉ-	
TIQUE	75
3.1 L'identité de Dassios	76
3.2 Temps de passage des α -quantiles	92
3.2.1 Les lois de $\eta_\alpha^B(T)$ et $\xi_\alpha^B(T)$	95
3.2.2 La loi de $(\eta_\alpha^B, \xi_\alpha^B, Q_\alpha^B, B_1)$	105
CHAPITRE IV	
APPLICATIONS DES α -QUANTILES	121
4.1 Les options α -lookback	123
4.2 Simulation des options α -lookback	128
CONCLUSION	137
APPENDICE A	
CHAPITRE 1	141
A.1 Preuves détaillées du chapitre 1	141
A.1.1 Lemme 1.2.1.	141
A.2 Les deux autres lois de l'arc-sinus de Lévy	142
APPENDICE B	
CHAPITRE 2	145
B.1 Preuves détaillées du chapitre 2	145
B.1.1 Théorème 2.1.1.	145
APPENDICE C	
CHAPITRE 3	163
C.1 Preuves détaillées de chapitre 3	163
C.1.1 Lemme 3.1.2.	163
C.1.2 Proposition 3.2.2.	164
C.1.3 Lemme 3.2.4.	166

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Le temps d'occupation au-dessus de $a \in \mathbb{R}$ par W	12
1.2 La densité d'une loi de l'arc-sinus avec $T = 1$ c.-à-d. $f(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t(T-t)}}$	14
1.3 La densité d'une loi de l'arc-sinus généralisée avec $T = 1$ c.-à-d. $f(t)$ tel que $\mathbb{P}\left(A_1^{W,+0} \in dt\right) = f(t)dt$	23
1.4 La conditionnement sur la première fois que W atteint la valeur k et l'utilisation de la propriété de Markov afin de passer de (1.13) à (1.14).	30
1.5 Un exemple de l'égalité en loi $A_T^{W,+k} \stackrel{d}{=} T - A_T^{X,+,-k}$ avec des trajectoires fixées.	31
1.6 Le temps d'occupation de l'intervalle (l, u) par W	33
2.1 Une illustration d'un paiement à l'échéance pour une option escalier exponentielle vers le bas	42
2.2 Le prix initial d'une option vanille, escalier vers le bas, et barrière vers le bas contre le prix initial de l'actif sous-jacent pour différentes valeurs de ρ ($K = 95, b = 90, T = 1, r = 0.04, \sigma = 0.4$)	49
2.3 Le delta initial d'une option vanille, escalier vers le bas, et barrière vers le bas contre le prix initial de l'actif sous-jacent pour différentes valeurs de ρ ($K = 95, b = 90, T = 1, r = 0.04, \sigma = 0.4$)	57
2.4 $\mathbb{P}_x\left(A_T^{B,-0} \in dt, B_T \in dz\right) = \mathbb{P}_{-x}\left(A_T^{B,-0} \in d(T-t), B_T \in d(-z)\right)$, ou $x > 0$ et $z < 0$	64
3.1 L'alpha quantile de Y avec $T = 4$ et $\alpha = 0.75$, c.-à-d. $Q_{0.75}^Y(4)$. . .	77
3.2 L'équation (3.1) pour une trajectoire fixée.	80
3.3 $\{Q_\alpha^W \leq x\} = \{A_1^{W,-x} \geq \alpha\}$ avec $x = 3$ et $\alpha = .5$	85

3.4	Les fonction de densité de M_1^B et Q_α^B pour différents α	93
3.5	Les fonction de densité de m_1^B et Q_α^B pour différents α	94
3.6	$\eta_\alpha^W(T)$ et $\xi_\alpha^W(T)$ avec $\alpha = .75$ et $T = 4$	95
3.7	L'équation (3.6) pour une trajectoire fixée.	101
3.8	$\{\eta_\alpha^B > u\} = \{Q_\alpha^B > M_u^B\}$ avec $u = .25$ et $\alpha = .75$	102
3.9	La densité de η_α^B c.-à-d. $f(u) = \frac{\mathbb{I}_{(u < \alpha)} + \mathbb{I}_{(u < 1-\alpha)}}{\pi\sqrt{u(1-u)}}$	106
3.10	$\{\tau_x^B \in du, T_y^B \in dv, M_t^B \in dz, B_t \in dw\}$, $0 < x < z, w < y < z$ et $x > y$	109
3.11	$\{T_{y-x}^{B*} \in d(v-u), M_{t-u}^{B*} \in d(z-x), B_{t-u}^* \in d(w-x)\}$, $0 < x < z, w < y < z$ et $x > y$	112
3.12	$\{\tau_{y-w}^{B*} \in d(t-v), M_{t-u}^{B*} \in d(z-w), B_{t-u}^* \in d(x-w)\}$, $0 < x < z, w < y < z$ et $x > y$	113
3.13	La transition de (3.17) à (3.18).	118
4.1	La différence entre les prix simulés des options α -lookback en utilisant l'identité de Dassios et une approche naïve ($\alpha = .8, \sigma = .2, r = .01, T = 1, S_0 = 10, K = 11$).	130
4.2	Le prix initial d'une option lookback comparé avec les prix simulés des options α -lookback avec plusieurs α en utilisant l'identité de Dassios ($\sigma = .2, r = .01, T = 1, K = 11$).	131
4.3	Le prix d'une option lookback comparé à le prix d'une option α -lookback simulées à l'aide de l'identité de Dassios. La ligne rouge est la moyenne des prix des α -lookback ($\alpha = .9999, \sigma = .2, r = .01, T = 1, S_0 = 10, K = 11$).	132
4.4	Prix simulés d'options asiatiques et options médianes. Les lignes rouge et bleu représentent les prix moyens. ($\alpha = .5, \sigma = .2, r = .01, T = 1, S_0 = 10, K = 11$)	134
A.1	Les trois lois de l'arc-sinus de Lévy	144
C.1	L'équation (C.3) avec une trajectoire fixée.	167

LISTE DES NOTATIONS

- $X \stackrel{d}{=} Y$ est utilisé lorsque deux variables aléatoires X et Y sont égales en loi
- $X \stackrel{\text{p.s.}}{=} Y$ est utilisé lorsque deux variables aléatoires X et Y sont presque sûrement égale
- $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est utilisé pour dénoter un mouvement brownien standard
- $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est utilisé pour dénoter un mouvement brownien arithmétique avec dérive $\mu \in \mathbb{R}$
- $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est utilisé pour dénoter un mouvement brownien arithmétique avec dérive $-\mu$, c'est-à-dire le processus X a une dérive qui est le négative de la dérive de W
- $W^{BSM} = (W_t^{BSM})_{t \geq 0}$ est utilisé pour dénoter un mouvement brownien arithmétique avec dérive $\nu = \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$, où $\sigma > 0$ et $r \geq 0$
- \mathbb{E}_x est l'espérance d'un mouvement brownien qui commence à x
- \mathbb{P}_x est la mesure de probabilité d'un mouvement brownien qui commence a x
- \mathbb{P} est la mesure de probabilité d'un mouvement brownien qui commence a 0
- E_{S_0} est l'espérance d'un mouvement brownien géométrique qui commence à S_0 et qui résout l'équation différentielle stochastique $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t$, où $r, \sigma > 0$.
- $A_t^{B,+,a} := \int_0^t \mathbb{I}_{\{B_s > a\}} ds$
- $A_t^{B,-,a} := \int_0^t \mathbb{I}_{\{B_s < a\}} ds$
- $Q_\alpha^B(T) := \inf \left\{ x : A_T^{B,-,x} > \alpha T \right\}$
- $M_t^B := \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$
- $m_t^B := \inf_{0 \leq s \leq t} B_s$
- $M_t^W := \sup_{0 \leq s \leq t} W_s$

- $m_t^W := \inf_{0 \leq s \leq t} W_s$
- $\theta_t^W := \sup \{s \leq t : W_t = M_t^W\}$
- $\tau_x^B := \inf \{s \geq 0 : B_s = x\}$
- $h(u; x, B)du := \mathbb{P}(\tau_x^B \in du)$
- $H(x)$ est la fonction de Heaviside
- $\eta_\alpha^W(T) := \inf \{s \in [0, T] : W_s = Q_\alpha^W(T)\},$
- $\xi_\alpha^W(T) := \sup \{s \in [0, T] : W_s = Q_\alpha^W(T)\}.$

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous allons discuter de temps d'occupation pour le mouvement brownien avec des applications en mathématiques financières. Nous fournissons une introduction complète à ces sujets ainsi que des preuves qui sont plus détaillées que ce qu'on peut trouver dans la littérature. Nous allons commencer par fournir des preuves détaillées des résultats classiques, la deuxième loi de l'arc-sinus de Lévy pour le mouvement brownien, et la version généralisée d'Akaho (1995) pour le mouvement brownien arithmétique.

Nous allons ensuite discuter des applications de ces résultats classiques en mathématiques financières. Nous allons nous concentrer principalement sur ce qui est connu comme les options escalier (step) de ?. Ce sont des options barrière généralisées avec le paiement à l'échéance suivant,

$$\exp \left(- \rho \cdot \left(\text{la quantité de temps que l'actif sous-jacent passe sous la barrière} \right) \right) \cdot (S_T - K)^+,$$

où S_T est le prix final de l'actif sous-jacent, $K > 0$ est le prix d'exercice et $\rho > 0$ est une constante prédéterminée qui est appelée le taux d'annulation.

Dans la deuxième moitié de ce mémoire, nous allons discuter des α -quantiles du mouvement brownien et de leurs applications en mathématiques financières. L' α -quantile d'un mouvement brownien est, grosso modo, la valeur telle que le processus passe $\alpha \cdot 100\%$ du temps au-dessous de cette valeur, où α est compris entre zéro et un. Nous allons présenter des propriétés intéressantes de la loi d'un α -quantile ainsi que les lois du premier et dernier temps de passage des α -quantiles.

Une application des α -quantiles que nous allons discuter est une généralisation des options lookback avec prix d'exercice fixé qu'on appelle les options α -lookback. Le paiement à l'échéance d'une option α -lookback est,

$$\left(\text{un } \alpha\text{-quantile de l'actif sous-jacent sur la durée du contrat} - K \right)^+,$$

où $K > 0$. Nous allons également discuter de l'utilisation des options α -lookback pour approximer des options asiatiques et des méthodes de Monte Carlo associées à des α -quantiles.

Mots-clés : temps d'occupation, mouvement brownien, loi de l'arc-sinus, option escalier (step), option corridor, alpha-quantile, l'identité Dasios, alpha-lookback.

INTRODUCTION

En 1919, le célèbre Paul Lévy a été approché par le doyen de l'École Polytechnique à Paris et a été forcé, selon la légende, de préparer trois exposés sur "le calcul des probabilités". L'exposé consistait à d'élaborer sur une idée d'Henri Poincaré et Pierre-Simon Laplace avant lui. L'idée était que les erreurs, qui peuvent être représentées comme la somme de variables aléatoires indépendantes, se comportent d'une façon gaussienne, étant donné que le maximum se comporte bien. Cette tâche inattendue fut le catalyseur du voyage de Paul Lévy dans l'étude de la théorie des probabilités. Dans ce voyage, Paul Lévy a fait tant de contributions à la théorie des probabilités que nous n'oserions pas essayer de les citer toutes ici. Plusieurs des contributions célèbres de Lévy concernent la théorie du mouvement brownien. Dans ce mémoire nous allons nous concentrer sur ses célèbres lois de l'arc-sinus pour le mouvement brownien et leurs applications en mathématiques financières. Il y a trois lois de l'arc-sinus pour le mouvement brownien. La première loi de l'arc-sinus se réfère à la fonction de répartition de l'instant du dernier retour à l'origine du mouvement brownien dans un intervalle fini. La deuxième loi de l'arc-sinus se réfère à la fonction de répartition de la quantité de temps qu'un mouvement brownien est positif dans un intervalle fini. La troisième loi de l'arc-sinus se réfère à la fonction de répartition de l'instant où le mouvement brownien atteint son maximum dans un intervalle fini. Il est assez surprenant que toutes ces variables aléatoires aient la même loi, et, comme nous le verrons plus tard, le fait que ces trois variables aléatoires suivent une loi de l'arc-sinus est assez contre-intuitif. Ceci est dû au fait que la loi de l'arc-sinus est symétrique autour de la moyenne et la moyenne est l'événement le moins probable, c'est-à-dire que

la loi a une densité en forme de "U". Les lois de l'arc-sinus de Paul Lévy ont de nombreuses applications en mathématiques financières de l'ère moderne. Ces applications sont des choses que Lévy n'aurait certainement pas pu imaginer à l'époque où il a découvert ses lois, mais le travail de Lévy est connu pour ses applications inattendues. "My admiration for Lévy's 'mathematical taste' increases each time his mark is revealed on yet another tool I need when tackling a problem in science that he could not conceivably have had on his mind." - ?.

Dans les années 1990, les options financières qui dépendaient des temps d'occupation de l'actif sous-jacent étaient en cours de création. Un temps d'occupation est la quantité de temps que l'actif sous-jacent reste dans un intervalle prédéterminé. La valorisation et la couverture de ces types d'options dans le célèbre modèle de Black-Scholes-Merton nécessitait une version plus générale des lois de l'arc-sinus de Lévy pour le mouvement brownien arithmétique. En 1995, Jirô Akahori de l'Université de Tokyo a calculé la forme fermée de la fonction de densité pour la quantité de temps qu'un mouvement brownien arithmétique, qui commence à zéro, est positif dans un intervalle fini. Il a également calculé la fonction de répartition, sous forme intégrale, pour la quantité de temps qu'un mouvement brownien arithmétique, qui commence à zéro, est positif dans un intervalle fini et la quantité de temps qu'un mouvement brownien arithmétique, qui commence à $x \in \mathbb{R}$, est positif dans un intervalle fini. En 1999, Andreas Pechtl du Centre d'Évaluation des Actifs Financiers et du Développement des Produits Financiers à Francfort a calculé la forme fermée de la fonction de répartition de la quantité de temps qu'un mouvement brownien arithmétique, qui commence à $x \in \mathbb{R}$, est positif dans un intervalle fini. Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous allons présenter des preuves, qui sont plus détaillées que ce qu'on peut trouver actuellement dans la littérature, de la deuxième loi de l'arc-sinus de Lévy et la version généralisée, pour le mouvement brownien arithmétique, de la deuxième loi de l'arc-sinus d'Akahori.

Les résultats de ? seront également présentés mais les calculs seront omis en raison de leur complexité. En 2000, Gianluca Fusai a écrit une excellente thèse de doctorat où il a calculé la fonction caractéristique du temps d'occupation d'un mouvement brownien arithmétique dans un intervalle $[l, u]$ sur $[0, T]$. Dans la dernière section du chapitre 1 nous allons présenter ce résultat mais les calculs seront omis, une fois de plus, en raison de leur complexité.

Dans le chapitre 2, avec les résultats du chapitre 1 en tête, nous allons discuter de différents types d'options financières qui dépendent des temps d'occupation de l'actif sous-jacent. Nous allons nous concentrer principalement sur ce qu'on appelle les options escalier. Ces options ont été créées en 1999 par Vadim Linetsky de l'Université du Michigan. Ces options ne sont pas actuellement transigées sur des marchés, ils sont, pour le moment, des créations mathématiques. Les options escalier sont une généralisation des options barrière dont le but est d'essayer d'atténuer un grand nombre d'inconvénients associés aux options barrière. Ces inconvénients seront discutés dans l'introduction du chapitre 2. Avec des options barrière vers le bas, le fait que tout dépassement de la barrière par l'actif sous-jacent, peu importe sa taille, a un grand effet sur le paiement à l'échéance de l'option provoque de nombreux problèmes. Les options escalier atténuent un bon nombre de ces problèmes en annulant le paiement à l'échéance peu à peu pendant le temps que l'actif sous-jacent passe sous la barrière, plutôt que d'annuler le paiement à l'échéance instantanément dès que l'actif sous-jacent touche la barrière. Il existe plusieurs types d'options escalier, voir Linetsky (1999) pour un catalogue complet ; celui que nous allons discuter en détail est l'option d'achat escalier exponentielle vers le bas. Cette option a le même paiement à l'échéance qu'une option d'achat vanille,

$$(S_T - K)^+,$$

où S_T est le prix final de l'actif sous-jacent et $K > 0$ le prix d'exercice, sauf qu'il est multiplié par un facteur dépendant du trajet qui est compris entre zéro et un.

Le facteur est,

$$\exp \left(- \rho \cdot (\text{la quantité de temps que l'actif sous-jacent passe sous la barrière}) \right),$$

où $\rho > 0$ est une constante prédéterminée qui est appelée le taux d'annulation. Nous allons présenter un calcul détaillé du prix initial d'une option d'achat escalier exponentielle vers le bas dans la section 2.1. Nous allons ensuite discuter d'un inconvénient lié aux options barrière qui est résolu avec les options escalier : la couverture delta à la barrière. Ce problème se produit parce que, avec les options barrière, le processus de prix n'est pas lisse à la barrière et donc le delta (dérivée du processus de prix par rapport au prix de l'actif sous-jacent) est inexistant. Avec les options escalier, le processus de prix est lisse à la barrière, ce qui nous permet d'obtenir le delta à la barrière. En pratique, la manière typique (et brute) de contourner ce problème est d'imaginer que la barrière est supérieure ou inférieure à ce qu'elle est vraiment et calculer le delta basé sur la barrière imaginaire. Nous allons vous présenter comment le fait que le processus de prix des options escalier est lisse à la barrière peut être utilisé pour approximer le delta d'une option barrière à la barrière. Le reste du chapitre 2 sera consacré à obtenir des résultats qui peuvent être déduits facilement de résultats déjà présentés. Nous allons utiliser le prix initial d'une option d'achat escalier exponentielle vers le bas pour calculer le prix initial d'une option cumulative parisienne. Une option cumulative parisienne est une option qui a le même paiement à l'échéance qu'une option vanille, cependant, si l'actif sous-jacent passe une quantité de temps prédéterminée et fixée soit au-dessous (vers le bas) ou au-dessus (vers le haut) d'une barrière prédéterminée, le paiement à l'échéance est annulé. Le mot cumulatif vient du fait que la quantité de temps fixée et prédéterminée au-dessus (ou en dessous) de la barrière n'a pas à être consécutive. Nous utiliserons ensuite le prix initial d'une option d'achat escalier exponentielle vers le bas pour calculer la loi conjointe de la valeur terminale d'un mouvement brownien standard, qui commence à $x \in \mathbb{R}$, dans l'intervalle

$[0, T]$ et la quantité de temps qu'un mouvement brownien, qui commence à $x \in \mathbb{R}$, est négatif dans l'intervalle $[0, T]$. Ce résultat peut être obtenu à moindre coût en prenant la transformée de Laplace inverse du prix initial d'une option d'achat escalier exponentielle vers le bas par rapport à ρ , le taux d'annulation. Dans la dernière section du chapitre 2, nous présenterons un moyen d'obtenir la formule fermée pour le prix de deux types d'options corridor, les options à un swap et à deux swaps, en utilisant les résultats du chapitre 1. Une option corridor est une option dont le paiement à l'échéance dépend de la quantité de temps que l'actif sous-jacent reste dans un intervalle au cours de la durée du contrat. Une option à deux swaps est une option avec paiement à l'échéance donné par,

$$\left(\lambda_1 \cdot (\text{la quantité de temps que l'actif sous-jacent passe au-dessus de } K) - \lambda_2 \cdot (\text{la quantité de temps que l'actif sous-jacent passe en dessous de } K) \right)^+,$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $K > 0$. Une option à un swap est une option avec paiement à l'échéance donné par,

$$\lambda \cdot (\text{la quantité de temps que l'actif sous-jacent passe au-dessus de } K),$$

où $\lambda > 0$ et $K > 0$.

En 1995, Angelos Dassios du London School of Economics travaillait sur les calculs d'Akaho (1995), et ce faisant il a obtenu une identité surprenante. Cette identité est une égalité en loi entre l' α -quantile d'un mouvement brownien arithmétique et la somme du maximum et minimum de deux mouvements browniens arithmétiques indépendants. L' α -quantile d'un mouvement brownien est, grosso modo, la valeur telle que le processus passe $\alpha \cdot 100\%$ du temps sous cette valeur, où α est compris entre zéro et un. Le chapitre 3 va commencer avec une définition complète d'un α -quantile et une preuve détaillée de l'identité de Dassios d'après ?. Dans la deuxième moitié du chapitre 3, nous allons discuter du premier et du dernier temps

de passage des α -quantiles pour le mouvement brownien. Le premier temps de passage d'un α -quantile est le premier instant où le mouvement brownien atteint un α -quantile prédéterminé et le dernier temps de passage d'un α -quantile est le dernier instant où le mouvement brownien atteint un α -quantile prédéterminé. Nous allons présenter un calcul détaillé, de Dassios (1995), des lois de ces temps de passage. Dans la dernière section du chapitre 3, nous fournissons une version détaillée du calcul, de Dassios (2005), de la loi conjointe de la valeur terminale d'un mouvement brownien standard, un α -quantile du mouvement brownien, et les premier et dernier temps de passage de cet α -quantile.

Dans le quatrième et dernier chapitre nous présenterons quelques applications des α -quantiles aux mathématiques financières. Nous allons commencer par une généralisation d'une option lookback avec prix d'exercice fixé. Une option lookback avec prix d'exercice fixé est une option où le paiement à l'échéance est,

$$\left(\text{le prix maximum de l'actif sous-jacent sur la durée du contrat} - K \right)^+,$$

où $K > 0$. Ceci est une option attrayante pour les investisseurs qui sont intéressés à parier sur une forte volatilité; la seule chose qui compte, afin de recevoir un paiement à l'échéance, est que le prix de l'actif sous-jacent passe au-dessus du prix d'exercice à n'importe quel moment pendant la durée du contrat. Cette option résout ce qu'on appelle le problème de la sortie du marché (décider quand il faut vendre votre option), toutefois, elle peut être très coûteuse. Une façon de réduire le prix de cette option est de remplacer le maximum par un α -quantile, c.-à-d. que le paiement à l'échéance est,

$$\left(\text{un } \alpha\text{-quantile de l'actif sous-jacent sur la durée du contrat} - K \right)^+.$$

Ce type d'option sera appelé un α -lookback. Si α est 0.5 nous nous référons à cette option comme une option médiane. On peut montrer que les α -lookbacks sont toujours moins chers que les options lookback. Une autre application intéressante

des α -quantiles est l'utilisation d'options médianes pour se rapprocher des options asiatiques. Une option asiatique est une option avec un paiement à l'échéance qui est donné par,

$$\left(\text{la moyenne arithmétique des prix des actifs sous-jacents pendant la durée du contrat} - K \right)^+.$$

Un problème avec les options asiatiques est qu'elles posent de nombreuses difficultés de calcul. Nous allons montrer que les options médianes, qui sont plus simples d'un point de vue calculatoire, sont une bonne approximation des options asiatiques. Même si les options α -lookback présentent moins de difficultés de calcul que les options asiatiques, elles en présentent tout de même. Dans la dernière section, nous allons discuter des moyens de contourner ces difficultés en utilisant des méthodes de Monte Carlo.

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

CHAPITRE I

LES TEMPS D'OCCUPATION POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN AVEC DÉRIVE

Dans cette section, nous allons présenter la dérivation de l'une des célèbres lois de l'arc-sinus de Lévy ; la distribution de la quantité de temps qu'un mouvement brownien est positif dans l'intervalle $[0, T]$. La quantité de temps qu'un mouvement brownien reste dans une région est appelée le temps d'occupation de cette région. Cette loi de l'arc-sinus est un résultat assez contre-intuitif. Comme nous le verrons plus tard, même si l'espérance de la proportion de temps que la particule brownienne est positive est 0.5, c'est l'événement le moins probable. Il existe de nombreuses façons pour obtenir ce résultat, celui que nous allons présenter dans la section 1.1 est une des applications des méthodes de Feynman-Kac, qui sera discutée plus tard. Dans les années 1990, des options financières basées sur les temps d'occupation ont commencé à apparaître et un résultat plus général, pour le mouvement brownien avec dérive, était nécessaire pour trouver le prix de ces options. En 1995 ceci a mené Jiro Akahori à obtenir la fonction de densité de la proportion de temps qu'un mouvement brownien arithmétique est inférieur à un certain nombre réel x sur $[0, T]$. Nous allons présenter le résultat de Akahori et sa preuve dans la section 1.2. qui est aussi une application des méthodes de Feynman-Kac. Akahori a également dérivé la fonction de répartition (FDR) de la proportion de temps qu'un mouvement brownien arithmétique reste inférieur à un

certain nombre réel x sur $[0, T]$, cependant, cette FDR est en forme d'intégrale. En 1999, cette FDR a été trouvée dans sa forme explicite par Pechtl et elle sera présentée à la section 1.2.1. En 2000, Gianluca Fusai a généralisé une fois de plus cette loi de l'arc-sinus. Cette fois, en regardant la quantité de temps qu'un mouvement brownien arithmétique est dans un intervalle $[a, b]$ sur $[0, T]$. Il a calculé la fonction caractéristique de cette variable aléatoire. Les calculs sont assez techniques et seront omis, mais nous allons quand même présenter ses résultats dans la section 1.3.

1.1 La loi de l'arc-sinus de Lévy

Tout au long de ce mémoire, nous allons utiliser $B = (B_t)_{t \geq 0}$ pour dénoter le mouvement brownien standard (MBS). En outre, pour $\mu \in \mathbb{R}$, nous allons utiliser $W = (W_t)_{t \geq 0}$, où $W_t := B_t + \mu t$, pour dénoter le mouvement brownien avec dérive μ (mouvement brownien arithmétique ou MBA) et $X = (X_t)_{t \geq 0}$, où $X_t := B_t - \mu t$, pour dénoter le mouvement brownien avec dérive $-\mu$. Pour $x \in \mathbb{R}$ nous allons utiliser \mathbb{P}_x pour dénoter la mesure de probabilité d'un mouvement brownien standard qui commence à x , c'est-à-dire $B_0 = x$. L'opérateur \mathbb{E}_x sera utilisé pour dénoter l'espérance (sous \mathbb{P}_x) d'un mouvement brownien standard qui commence à x . Si $x = 0$ il est possible que nous écrivons \mathbb{P} au lieu de \mathbb{P}_0 et \mathbb{E} au lieu de \mathbb{E}_0 .

Dans cette section nous allons définir les temps d'occupation pour un mouvement brownien (standard ou arithmétique). Nous allons ensuite dériver la fameuse loi de l'arc-sinus de Lévy en utilisant les méthodes de Feynman-Kac avec un théorème de Kac qui est légèrement modifié pour l'adapter à nos besoins.

Remarque. *«Les méthodes de Feynman-Kac»*

Ce que nous appelons «les méthodes de Feynman-Kac» est une procédure qui est utilisée pour calculer des fonctions de densité. La procédure commence par défi-

nir une fonction qui est la double transformée de Laplace de la densité que nous sommes intéressés à trouver. Nous serons alors capables de trouver cette fonction en résolvant une équation différentielle. L'équation différentielle appropriée pour résoudre est connue grâce aux théorèmes de Feynman et/ou Kac. Il faut se rappeler que la fonction que nous obtenons en résolvant cette équation différentielle est la double transformée de Laplace de la densité que nous voulons. La dernière étape afin d'obtenir la densité que nous voulons est de prendre la double transformée de Laplace inverse de cette fonction. Ce qui nous laisse avec la fonction de densité désirée. Cette procédure va être effectuée à plusieurs reprises en détail dans le présent mémoire. Un exemple qui est facile à suivre est décrit dans la démonstration du théorème 1.1.1.

Définition 1.1.1. Soit $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique. Le temps d'occupation au-dessus de $a \in \mathbb{R}$ par Z est la quantité de temps pendant laquelle Z est dans l'intervalle (a, ∞) jusqu'à un temps fixé $T > 0$ c'est-à-dire,

$$A_T^{Z,+,a} := \int_0^T \mathbb{I}_{(Z_t > a)} dt.$$

Aussi,

$$A_T^{Z,-,a} := \int_0^T \mathbb{I}_{(Z_t < a)} dt.$$

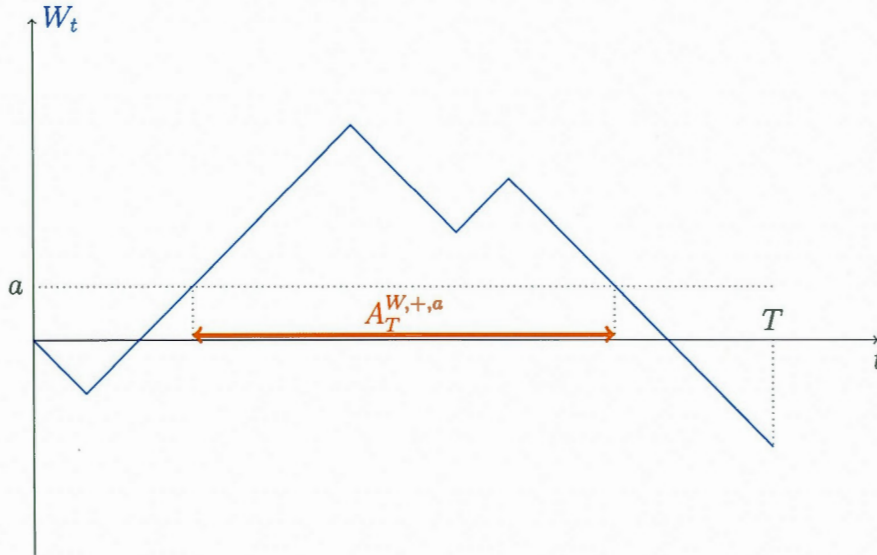
Voir la figure 1.1 pour une illustration de la définition 1.1.

Avant de présenter le premier théorème de cette section nous allons présenter une remarque sur la notation $\mathbb{P}(Y \in dy)$.

Remarque. Intuitivement, vous pouvez penser à la notation $\mathbb{P}(Y \in dy)$ comme la probabilité que la variable aléatoire Y soit dans un petit voisinage de y . Plus précisément, si Y est une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

$$\mathbb{P}(Y \in A) = \int_A \mathbb{P}(Y \in dx), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

Figure 1.1 Le temps d'occupation au-dessus de $a \in \mathbb{R}$ par W



où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la σ -algèbre de Borel.

De plus, si Y a une fonction de densité $f(y)$ alors,

$$\int_A \mathbb{P}(Y \in dy) = \int_A f(y) dy.$$

Il faut noter également que, pour $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(Y \in d(\gamma))$ signifie la densité de Y appliquée à γ c.-à-d. $\mathbb{P}(Y \in d(\gamma)) = f(\gamma)$ non pas $\mathbb{P}(Y = \gamma)$. Exemple :

$$\mathbb{P}(Y \in d(0)) = f(0) \text{ non pas } \mathbb{P}(Y = 0).$$

Aussi, pour un T fixé, $\mathbb{P}(Y \in d(T - y))$ signifie une translation de la densité de Y c.-à-d. $\mathbb{P}(Y \in d(T - y)) = f(T - y) dy$. Exemple :

$$\mathbb{P}(1 - Y \in dy) = \mathbb{P}(Y \in d(1 - y)) = f(1 - y) dy.$$

Enfin, pour un T fixé, $\mathbb{P}(Y \in d(yT))$ signifie une compression ou étirement de la densité de Y c.-à-d. $\mathbb{P}(Y \in d(yT)) = f(yT) dy$. Exemple :

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y}{T} \in dy\right) = \mathbb{P}(Y \in d(Ty)) = f(Ty) dy.$$

Théorème 1.1.1. (?) "La loi de l'arc-sinus de Lévy."

Pour $0 < t < T$,

$$\mathbb{P} \left(A_T^{B,+0} \in dt \right) = \frac{1}{\pi \sqrt{t(T-t)}} dt,$$

et,

$$\mathbb{P} \left(A_T^{B,+0} \leq t \right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{\frac{t}{T}} \right).$$

Remarque. Cette loi de l'arc-sinus est en fait une des trois lois de l'arc-sinus prouvées par Paul Lévy. Celle-ci est généralement désignée comme la deuxième loi de l'arc-sinus. Pour ceux qui sont intéressés, les deux autres sont abordées dans l'annexe (A.2).

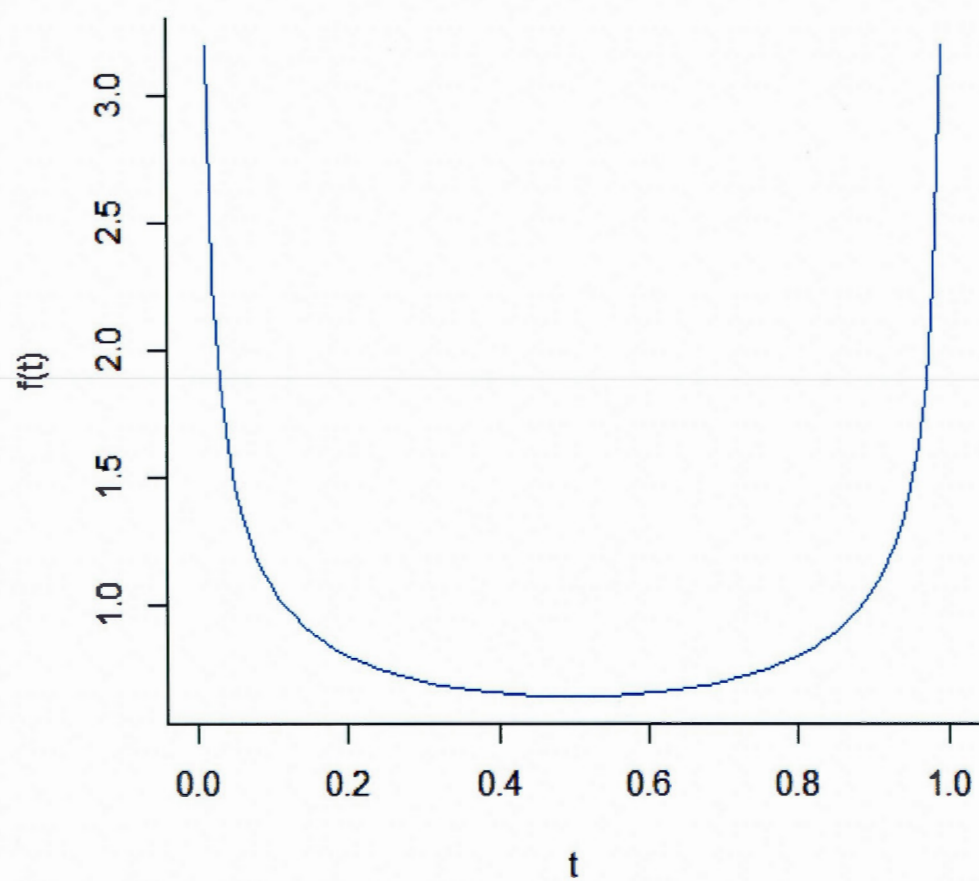
Remarque. Il y a des moments où nous parlons de la proportion de temps que la particule brownienne est positive, c'est-à-dire $\frac{1}{T} A_T^{B,+0}$, au lieu de la quantité de temps que la particule brownienne est positive $A_T^{B,+0}$. Celles-ci sont traitées de la même façon c'est-à-dire, disons que $T = 50$, nous pouvons écrire la probabilité que la proportion de temps que la particule brownienne est positive soit inférieure à 0.25 comme,

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{50} A_{50}^{B,+0} \leq 0.25 \right) = \mathbb{P} \left(A_{50}^{B,+0} \leq 12.5 \right).$$

En outre, en raison des propriétés d'échelle du mouvement brownien standard, nous pouvons fixer $T = 1$ sans perte de généralité, car,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(A_{50}^{B,+0} \leq 12.5 \right) &= \mathbb{P} \left(\int_0^{50} \mathbb{I}_{(B_t > 0)} dt \leq 12.5 \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\int_0^{50} \mathbb{I}_{(\sqrt{50} B_{\frac{t}{50}} > 0)} dt \leq 12.5 \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\int_0^{50} \mathbb{I}_{(B_{\frac{t}{50}} > 0)} dt \leq 12.5 \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\int_0^1 \mathbb{I}_{(B_r > 0)} dr \leq .25 \right) \\ &= \mathbb{P} \left(A_1^{B,+0} \leq 0.25 \right). \end{aligned}$$

Figure 1.2 La densité d'une loi de l'arc-sinus avec $T = 1$ c.-à-d. $f(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t(T-t)}}$



Remarque. (concernant la figure 1.2) Ce résultat est pour le mouvement brownien, cependant il sert de bonne approximation des marches aléatoires simples et symétriques puisque le mouvement brownien est un cas asymptotique des marches aléatoires. La raison pour laquelle nous mentionnons cela c'est parce qu'il est plus facile de voir la contre-intuitivité de ce résultat avec un jeu de tirage de pièces de monnaie. Par exemple, disons que vous jouez à un jeu où vous tirez une pièce de monnaie à plusieurs reprises. Vous gagnez un dollar avec pile et vous perdez un dollar avec face (vous pouvez être endetté). Dans ce jeu, certains pourraient s'attendre qu'il y ait une bonne chance que vous allez passer environ la moitié du temps en dette. C'est en fait la vérité est tout autre. L'espérance de la proportion de temps que vous êtes endetté est 0.5, mais cela est le résultat le moins probable. La probabilité d'être en dette (ou de ne pas être en dette) à peu près la moitié du temps est approximativement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(A_1^{B,+0} \leq 0.55\right) - \mathbb{P}\left(A_1^{B,+0} \leq 0.45\right) &= \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sqrt{0.55}\right) - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sqrt{0.45}\right) \\ &= 0.0638. \end{aligned}$$

La probabilité d'être en dette plus de 80% du temps ou moins de 20 % du temps est approximativement,

$$\mathbb{P}\left(A_1^{B,+0} \leq 0.2\right) + \left[1 - \mathbb{P}\left(A_1^{B,+0} \leq 0.8\right)\right] = 0.5903.$$

Cela nous dit qu'il y a une bonne chance que vous serez en dette pour une grande proportion du temps ou une petite proportion du temps, mais pas autour de la moitié du temps !

Nous terminons cette remarque par un exemple du célèbre livre de Feller (1968) :

Supposons que vous effectuez une expérience d'apprentissage sur une classe de 11 étudiants en finance. Ces étudiants doivent gérer un portefeuille fictif pendant un an. À la fin de chaque semaine, les élèves reçoivent un dollar s'ils ont bien réussi à

bien gérer leur portefeuille ou perdent un dollar s'ils ont mal géré leur portefeuille. À la fin d'une année, un étudiant était sans dette (positif) pour chaque semaine, sauf peut-être une. Un autre élève était en dette (négatif) pour chaque semaine, sauf peut-être une. Quel élève est le meilleur ? La plupart des gens disent que le premier élève est le meilleur, mais qu'est-ce que cela signifie d'être le «meilleur». Être le meilleur signifie généralement que ses résultats sont si bons qu'il est presque impossible qu'ils arrivent par hasard. N'importe qui peut obtenir un "trou d'un coup", mais le "meilleur" golfeur doit être capable de le faire assez souvent afin que la chance ne soit sûrement pas un facteur. Par conséquent, afin de dire qui est le meilleur élève, nous devons nous demander si ces résultats sont assez forts pour exclure la chance. La probabilité d'être sans dette pendant au plus 1 sur 52 semaines (en dette pendant au moins 51 sur 52 semaines) est environ,

$$\mathbb{P} \left(A_1^{B,+0} \leq \frac{1}{52} \right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{\frac{1}{52}} \right) = 0.09,$$

et en raison de la symétrie c'est aussi la probabilité d'être sans dette pour au moins 51 des 52 semaines. Donc, même si cette expérience d'apprentissage ne requiert aucune qualification que ce soit et a été entièrement basée sur la chance, ces résultats seraient probables. En fait, l'espérance du nombre d'étudiants qui sont en dette chaque semaine sauf peut-être une est $0.09(11) = 1$. Par la symétrie, vous espérez aussi 1 étudiant sans dette pour chaque semaine, sauf peut-être une. Par conséquent, nous ne pouvons pas dire qui est le meilleur étudiant.

Avant que nous commençons la preuve de la loi de l'arc-sinus de Lévy, nous devons présenter un théorème très important. Ce théorème est l'un des nombreux théorèmes de Richard Feynman et/ou Mark Kac qui décrivent la relation entre les équations différentielles stochastiques et les équations aux dérivées partielles. Pour plus d'informations, voir ? p. 268, 271, et 366. Dans ce mémoire, nous allons juste appliquer ce résultat.

Théorème 1.1.2. (?) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ deux fonctions Borel-mesurables qui ont des limites à gauche et des limites à droite partout sur \mathbb{R} avec au plus un nombre fini de discontinuités sur tout intervalle borné; de plus, supposons que, pour un certain $\alpha > 0$ fixé,

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha T} |f(W_T)| dT \right] < \infty.$$

Alors, pour $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, la fonction,

$$z(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty f(W_T) \exp \left\{ -\alpha T - \int_0^T g(W_s) ds \right\} dT \right], \quad (1.1)$$

est bornée, et satisfait à l'équation différentielle,

$$(\alpha + g)z = \frac{1}{2}z'' + \mu z' + f, \quad (1.2)$$

partout sur \mathbb{R} sauf aux points de discontinuité de f ou g .

De plus, z et z' sont continues et z'' possède des limites à gauche et des limites à droite en tout point avec au plus un nombre fini de discontinuités sur tout intervalle borné.

Remarque. Dans le théorème précédent, la fonction f est appelée le lagrangien et g est appelée le potentiel. Pour ceux qui sont familiers avec les méthodes de Feynman-Kac vous pouvez voir que ce théorème est un peu modifié en comparaison avec le théorème typique, où f et g sont habituellement supposées être continues. La raison pour cela est que lorsqu'il s'agit des temps d'occupation, nous avons souvent des potentiels de la forme $g(x) = \beta \mathbb{I}_{(x>0)}$ ou $g(x) = \beta \mathbb{I}_{(x<0)}$ avec $\beta > 0$, qui ne sont pas continus à $x = 0$.

Avec le théorème 1.1.2. en main nous sommes maintenant prêts à démontrer la loi de l'arc-sinus de Lévy.

Remarque. La preuve suivante contient des transformées de Laplace inverses. Pour ceux qui ne sont pas familiers avec les transformées de Laplace inverses, voir Dyke (2004) pour une excellente introduction.

Démonstration du théorème 1.1.1. Nous allons commencer par définir,

$$z(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty \exp \left\{ -\alpha T - \beta \int_0^T \mathbb{I}_{(B_s > 0)} ds \right\} dT \right],$$

où $\alpha, \beta > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. La fonction $z(x)$ est de la forme donnée dans (1.1) avec $f = 1$, $\mu = 0$, et $g = \beta \mathbb{I}_{(x > 0)}$. Grâce au théorème 1.1.2. nous savons que $z(x)$ satisfait à l'équation différentielle ordinaire (l'EDO) non-homogène suivante,

$$(\alpha + \beta \mathbb{I}_{(x > 0)})z = \frac{1}{2}z'' + 1, \quad x \neq 0,$$

qui est égale à l'EDO non-homogène suivante,

$$\begin{cases} (\alpha + \beta \cdot 1)z = \frac{1}{2}z'' + 1, & x > 0, \\ (\alpha + \beta \cdot 0)z = \frac{1}{2}z'' + 1, & x < 0. \end{cases}$$

Ce système peut être résolu en utilisant la méthode des coefficients indéterminés pour les équations différentielles linéaires non-homogènes. La solution générale, unique et bornée, est la suivante,

$$z(x) = \begin{cases} Ae^{-x\sqrt{2(\alpha+\beta)}} + \frac{1}{\alpha+\beta}, & x > 0, \\ Be^{x\sqrt{2\alpha}} + \frac{1}{\alpha}, & x < 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

D'après le théorème 1.1.2., encore une fois, nous savons que z et z' sont continues à zéro, c'est-à-dire,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} z(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} z(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} z'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} z'(x),$$

ce qui implique que,

$$A + \frac{1}{\alpha + \beta} = B + \frac{1}{\alpha},$$

et

$$-A\sqrt{2(\alpha + \beta)} = B\sqrt{2\alpha}.$$

Avec quelques manipulations algébriques, nous avons que,

$$A = \frac{\sqrt{\alpha + \beta} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}(\alpha + \beta)}. \quad (1.4)$$

Maintenant en insérant (1.4) dans (1.3), nous pouvons trouver la valeur de $z(0)$,

$$z(0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}}. \quad (1.5)$$

De plus, par la définition de $z(0)$, nous avons que,

$$z(0) = \mathbb{E}_0 \left[\int_0^\infty \exp \left\{ -\alpha t - \beta \int_0^t \mathbb{I}_{(B_s > 0)} ds \right\} dt \right]. \quad (1.6)$$

En égalisant (1.5) et (1.6), nous avons que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}} &= \mathbb{E}_0 \left[\int_0^\infty \exp \left\{ -\alpha T - \beta \int_0^T \mathbb{I}_{(B_s > 0)} ds \right\} dT \right] \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \mathbb{E}_0 \left[\exp \left\{ -\alpha T - \beta \int_0^T \mathbb{I}_{(B_s > 0)} ds \right\} \right] dT \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha T} \mathbb{E}_0 \left[e^{-\beta \int_0^T \mathbb{I}_{(B_s > 0)} ds} \right] dT \\ &\equiv \int_0^\infty e^{-\alpha T} \mathbb{E}_0 \left[e^{-\beta A_T^{B,+,0}} \right] dT \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha T} \int_0^\infty e^{-\beta t} \mathbb{P}_0 \left(A_T^{B,+,0} \in dt \right) dT \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha T} \int_0^T e^{-\beta t} \mathbb{P}_0 \left(A_T^{B,+,0} \in dt \right) dT, \end{aligned}$$

car si $t > T$ alors $\mathbb{P}_0 \left(A_T^{B,+,0} \in dt \right) = 0$.

Donc,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha T} \int_0^T e^{-\beta t} \mathbb{P}_0 \left(A_T^{B,+,0} \in dt \right) dT = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Ainsi nous avons que $\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$ est la double transformée de Laplace de $\mathbb{P}_0 \left(A_T^{B,+0} \in dt \right)$, une fois de $t \rightarrow \beta$ et une autre fois de $T \rightarrow \alpha$. Donc, pour trouver $\mathbb{P}_0 \left(A_T^{B,+0} \in dt \right)$, nous devons trouver la double transformée de Laplace inverse de $\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$. Nous allons d'abord prendre la transformée de Laplace inverse par rapport au β . Ensuite, nous allons prendre la transformée de Laplace inverse de la première inversion par rapport à α .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\beta \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \mathcal{L}_{\beta \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\alpha+\beta)}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \mathcal{L}_{\beta \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right\} e^{-t\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-t\alpha}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\alpha \rightarrow T}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-t\alpha} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \mathcal{L}_{\alpha \rightarrow T}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-t\alpha} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi T}} \right\}_{T \rightarrow T-t} \cdot \mathbb{I}_{(0 \leq t \leq T)} \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{t(T-t)}} \mathbb{I}_{(0 \leq t \leq T)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{P} \left(A_T^{B,+0} \in dt \right) = \frac{1}{\pi \sqrt{t(T-t)}} \mathbb{I}_{(0 \leq t \leq T)} dt.$$

Finalement, pour trouver la fonction de répartition de $A_t^{B,+0}$ nous n'avons qu'à intégrer $\mathbb{P} \left(A_T^{B,+0} \in dt \right)$. Ainsi, pour $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(A_T^{B,+0} \leq t \right) &= \int_0^t \frac{1}{\pi \sqrt{u(T-u)}} du \\ &\stackrel{(r=\sqrt{\frac{u}{T}})}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{t}{T}}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{\frac{t}{T}} \right). \end{aligned}$$

□

La loi de l'arc-sinus de Lévy est valide seulement pour le mouvement brownien standard. Toutefois pour plusieurs applications financières, comme trouver le prix de plusieurs options exotiques dans le modèle de Black-Scholes-Merton, nous avons besoin d'un résultat plus général. Nous avons besoin de généraliser ce résultat au cas où nous avons un mouvement brownien avec dérive. Cela sera fait dans la section suivante.

1.2 La loi de l'arc-sinus généralisée

Dans les années 1990, de nouveaux types d'options basées sur les temps d'occupation ont été créés. Afin de trouver le prix de ces options dans le modèle de Black-Scholes-Merton une loi de l'arc-sinus plus générale était nécessaire. À cause de cette nécessité, Akahori (1995) a dérivé la fonction de densité pour le temps d'occupation d'un mouvement brownien avec dérive $\mu \in \mathbb{R}$. Dans cette section nous allons passer en revue sa démonstration. Toutefois pour la démonstration de la fonction de répartition du temps d'occupation d'un mouvement brownien avec dérive $\mu \in \mathbb{R}$ nous allons passer en revue la démonstration de ?.

Définition 1.2.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x)$ est définie comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée et réduite, c'est-à-dire,*

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

De plus,

$$\bar{\Phi}(x) := 1 - \Phi(x).$$

Définition 1.2.2. *Le premier instant que le processus W atteint le niveau $k \in \mathbb{R}$ est défini comme,*

$$\tau_k^W := \inf\{s \geq 0 : W_s = k\}.$$

τ_k^W est un temps d'arrêt.

Proposition 1.2.1. (?) *La fonction de répartition de τ_k^W est donnée par,*

(i) *pour $k > 0$,*

$$\mathbb{P}(\tau_k^W \leq t) = e^{2\mu k} \Phi\left(\frac{-k - \mu t}{\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{\mu t - k}{\sqrt{t}}\right),$$

(ii) *pour $k < 0$,*

$$\mathbb{P}(\tau_k^W \leq t) = \Phi\left(\frac{k - \mu t}{\sqrt{t}}\right) + e^{2k\mu} \Phi\left(\frac{k + \mu t}{\sqrt{t}}\right).$$

De plus, la fonction de densité de τ_k^W est donnée par,

$$h(t; k, W) = \frac{|k|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(\frac{(k - \mu t)^2}{2t}\right),$$

où $t \geq 0$ et $k \in \mathbb{R}$.

Nous sommes maintenant prêts à présenter le théorème principal de cette section.

Théorème 1.2.1. (?) *"La loi de l'arc-sinus généralisée."*

Pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $0 \leq t \leq T$,

(i)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_T^{W,+0} \in dt) = & \left(\sqrt{\frac{2}{\pi(T-t)}} e^{-\frac{\mu^2}{2}(T-t)} - 2\mu\bar{\Phi}(\mu\sqrt{(T-t)}) \right) \\ & \cdot \left(\mu + \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}t}}{\sqrt{2\pi t}} - \mu\bar{\Phi}(\mu\sqrt{t}) \right) dt. \end{aligned}$$

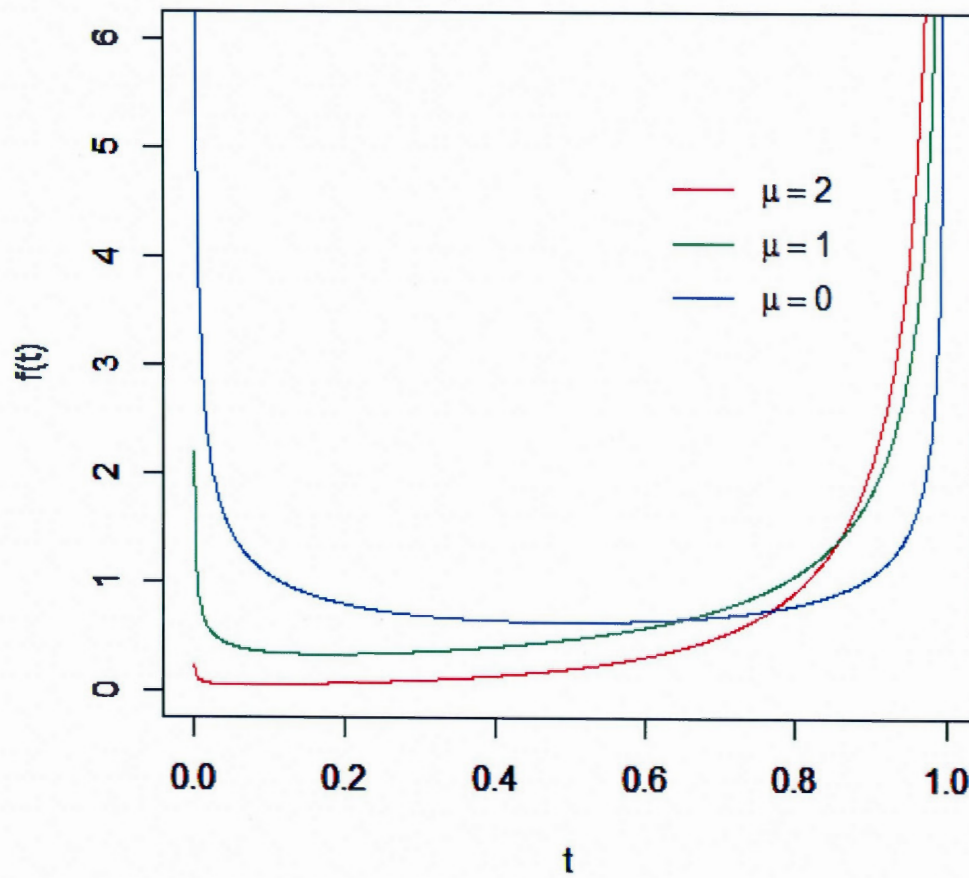
(ii) *Pour $k < 0$,*

$$\mathbb{P}(A_T^{W,+,k} \leq t) = \int_0^t \mathbb{P}(A_{T-s}^{W,+,0} \leq t-s) h(s; k, W) ds,$$

et pour $k > 0$,

$$\mathbb{P}(A_T^{W,+,k} \leq t) = 1 - \int_0^{T-t} \mathbb{P}(A_{T-s}^{X,+,0} \leq T-t-s) h(s; -k, X) ds.$$

Figure 1.3 La densité d'une loi de l'arc-sinus généralisée avec $T = 1$ c.-à-d. $f(t)$ tel que $\mathbb{P}\left(A_1^{W,+0} \in dt\right) = f(t)dt$



Remarque. Nous pouvons facilement passer de $A_T^{W,+0}$ à $A_T^{W,-0}$ avec l'identité suivante,

$$A_T^{W,-0} + A_T^{W,+0} = T \text{ p.s.}$$

C'est-à-dire,

$$\mathbb{P}\left(A_T^{W,+0} \in dt\right) = \mathbb{P}\left(A_T^{W,-0} \in d(T-t)\right).$$

Remarque. (concernant la figure 1.3) En fixant $\mu = 0$, nous pouvons facilement voir que la loi de l'arc-sinus généralisée de Akahori devient la loi de l'arc-sinus de Lévy, c'est-à-dire avec $\mu = 0$ la figure 1.3 est équivalente à la figure 1.2. Nous pouvons voir clairement que lorsque nous augmentons μ il y a plus de probabilité associée à passer une grande proportion du temps dans les réels positifs. Il y a également moins de probabilité associée à passer une petite proportion du temps dans les positifs lorsque nous augmentons μ . C'est ce que nous attendions.

Remarque. La forme explicite de la fonction de distribution dans le théorème 1.2.1. est donnée dans ?. Elle sera présentée dans la section suivante.

Remarque. La preuve de (i) sera la preuve originale d'Akahori (1995). Une deuxième preuve a été présentée dans ? en commençant avec la loi conjointe de $(B_T, A_T^{B,+0})$, qui était dérivée dans Billingsley (1968), et en appliquant les théorèmes de Girsanov et Fubini. Pour la preuve de (ii) nous allons présenter la preuve de ?.

Avant de commencer la démonstration du théorème 1.1.2., voici un lemme dont nous aurons besoin.

Lemme 1.2.1. (?) Soit $\mu \in \mathbb{R}$, alors,

$$\mathcal{L}_{s \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{\mu^2 + 2s}}{s} \right\} = \int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta + \mu.$$

La preuve du lemme 1.2.1. peut être trouvée dans l'annexe (A.1.1.).

Démonstration du théorème 1.2.1. (i) Nous allons commencer par appliquer le théorème 1.1.2. avec $f = 1$, $\mu \in \mathbb{R}$, et $g = \beta \mathbb{I}_{(x < 0)}$, où $\beta > 0$. Cela nous donne que, pour $\alpha > 0$,

$$z(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha T} e^{-\beta A_T^{W, -0}} dT \right] \equiv \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha T} e^{-\beta \int_0^T \mathbb{I}_{(W_s < 0)} ds} dT \right],$$

est la solution unique et bornée de l'équation différentielle ordinaire non-homogène suivante,

$$\frac{-z''}{2} - \mu z' + (\alpha + \beta \mathbb{I}_{(x < 0)})z = 1,$$

qui peut être écrite de la manière suivante,

$$\begin{cases} \frac{-z''}{2} - \mu z' + (\alpha + \beta \cdot 1)z = 1, & x < 0, \\ \frac{-z''}{2} - \mu z' + (\alpha + \beta \cdot 0)z = 1, & x > 0. \end{cases}$$

La solution générale et bornée peut être facilement trouvée avec la méthode des coefficients indéterminés. Cette méthode nous donne,

$$z(x) = \begin{cases} A e^{x(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2(\alpha + \beta)})} + \frac{1}{\alpha + \beta}, & x < 0, \\ B e^{x(-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\alpha})} + \frac{1}{\alpha}, & x > 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Pour trouver la constante A nous allons utiliser le fait que, par le théorème 1.1.2., $z(x)$ et $z'(x)$ sont continues à zéro, c'est-à-dire,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} z(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} z(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} z'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} z'(x).$$

Cela implique que,

$$\begin{cases} A + \frac{1}{\alpha + \beta} = B + \frac{1}{\alpha}, \\ A \left(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2(\alpha + \beta)} \right) = B \left(-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\alpha} \right), \end{cases}$$

et avec quelques manipulations algébriques, longues mais faciles, nous avons que,

$$\begin{aligned} A = & \frac{\mu}{2\alpha} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2(\alpha + \beta)}}{\alpha + \beta} - \frac{\mu}{2(\alpha + \beta)} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}{\alpha} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2(\alpha + \beta)}}{\alpha + \beta} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}{\alpha} - \frac{\mu^2 + 2\alpha}{2\alpha(\alpha + \beta)}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Maintenant, en insérant (1.8) dans (1.7), nous avons que,

$$\begin{aligned}
 z(0) &= A + \frac{1}{\alpha + \beta} \\
 &= \frac{\mu}{2\alpha} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2(\alpha + \beta)}}{\alpha + \beta} - \frac{\mu}{2(\alpha + \beta)} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}{\alpha} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2(\alpha + \beta)}}{\alpha + \beta} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}{\alpha} - \frac{\mu^2}{2\alpha(\alpha + \beta)}. \tag{1.9}
 \end{aligned}$$

Comme dans la preuve de la loi de l'arc-sinus de Lévy nous avons, par définition, que $z(0)$ est la double transformée de Laplace de $\mathbb{P}(A_T^{W,-,0} \in dt)$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
 z(0) &\equiv \mathbb{E}_0 \left[\int_0^\infty e^{-\alpha T} e^{-\beta A_T^{W,-,0}} dT \right] \\
 &= \int_0^\infty e^{-\alpha T} \int_0^\infty e^{-\beta t} \mathbb{P}(A_T^{W,-,0} \in dt) dT, \\
 &= \int_0^\infty e^{-\alpha T} \int_0^T e^{-\beta t} \mathbb{P}(A_T^{W,-,0} \in dt) dT, \tag{1.10}
 \end{aligned}$$

car si $t > T$ alors $\mathbb{P}(A_T^{W,-,0} \in dt) = 0$.

Donc, en égalisant (1.10) et (1.9) nous avons que,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-\alpha T} \int_0^T e^{-\beta t} \mathbb{P}(A_T^{W,-,0} \in dt) dT &= \frac{\mu}{2\alpha} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2(\alpha + \beta)}}{\alpha + \beta} - \frac{\mu}{2(\alpha + \beta)} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}{\alpha} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2(\alpha + \beta)}}{\alpha + \beta} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}{\alpha} - \frac{\mu^2}{2\alpha(\alpha + \beta)}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour obtenir $\mathbb{P}(A_T^{W,-,0} \in dt)$ nous devons trouver la double transformée de Laplace inverse de $\frac{\mu}{2\alpha} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2(\alpha + \beta)}}{\alpha + \beta} - \frac{\mu}{2(\alpha + \beta)} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2(\alpha + \beta)}}{\alpha + \beta} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}{\alpha} - \frac{\mu^2}{2\alpha(\alpha + \beta)}$.

Nous allons d'abord prendre la transformée de Laplace inverse par rapport au β . Ensuite, nous allons prendre la transformée de Laplace inverse de la première inversion par rapport à α .

En utilisant le lemme 1.2.1., nous pouvons maintenant calculer les transformées

de Laplace inverses dont nous avons besoin. Premièrement,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{\beta \rightarrow t}^{-1}\{z(0)\} \\
 &= \mathcal{L}_{\beta \rightarrow t}^{-1}\left\{\frac{\mu}{2\alpha} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2(\alpha + \beta)}}{\alpha + \beta}\right\} \\
 &\quad - \mathcal{L}_{\beta \rightarrow t}^{-1}\left\{\frac{\mu}{2(\alpha + \beta)} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}{\alpha}\right\} \\
 &\quad + \mathcal{L}_{\beta \rightarrow t}^{-1}\left\{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2(\alpha + \beta)}}{\alpha + \beta} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}{\alpha}\right\} \\
 &\quad - \mathcal{L}_{\beta \rightarrow t}^{-1}\left\{\frac{\mu^2}{2\alpha(\alpha + \beta)}\right\} \\
 &= \left\{\frac{\mu}{2\alpha} e^{-\alpha t} \left(\int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta + \mu\right)\right\} - \left\{\frac{\mu}{2\alpha} \sqrt{\mu^2 + 2\alpha} \cdot e^{-\alpha t}\right\} \\
 &\quad + \left\{\frac{\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}{2\alpha} e^{-\alpha t} \left(\int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta + \mu\right)\right\} - \left\{\frac{\mu^2}{2\alpha} e^{-\alpha t}\right\}.
 \end{aligned}$$

Maintenant nous allons inverser cette transformée de Laplace inverse par rapport

à α ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\alpha \rightarrow T}^{-1} \{ \mathcal{L}_{\beta \rightarrow t}^{-1} \{ z(0) \} \} &= \frac{\mu}{2} \left(\int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta + \mu \right) \mathcal{L}_{\alpha \rightarrow T}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right\} \\
&\quad - \frac{\mu}{2} \mathcal{L}_{\alpha \rightarrow T}^{-1} \left\{ e^{-\alpha t} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}{\alpha} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta + \mu \right) \mathcal{L}_{\alpha \rightarrow T}^{-1} \left\{ e^{-\alpha t} \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}{\alpha} \right\} \\
&\quad - \frac{\mu^2}{2} \mathcal{L}_{\alpha \rightarrow T}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right\} \\
&= \frac{\mu}{2} \left(\int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta + \mu \right) H(T-t) \\
&\quad - \frac{\mu}{2} \left(\int_{T-t}^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta + \mu \right) H(T-t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta + \mu \right) \left(\int_{T-t}^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta + \mu \right) H(T-t) \\
&\quad - \frac{\mu^2}{2} H(T-t) \\
&= \mu \left(\int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta \right) H(T-t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta \right) \left(\int_{T-t}^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta \right) H(T-t) \\
&= \left(\int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta \right) \left(\mu + \frac{1}{2} \int_{T-t}^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta \right) H(T-t),
\end{aligned} \tag{1.11}$$

où $H(x)$ est la fonction de Heaviside: c'est-à-dire,

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Finalement, en utilisant l'intégration par parties et la substitution $r = \mu\sqrt{\theta}$, nous

avons que,

$$\int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{\mu^2}{2}t} - 2\mu \int_{\mu\sqrt{t}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} dr, \quad (1.12)$$

et le résultat désiré peut être facilement obtenu en insérant (1.12) dans (1.11).

(ii) Maintenant, pour trouver la fonction de répartition de $A_T^{W,-,k}$, nous allons profiter de la propriété de Markov.

• Pour $k < 0$ et $0 \leq t \leq T$,

$$\mathbb{P} \left(A_T^{W,+,k} \leq t \right) \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \mathbb{P} \left(\int_0^T \mathbb{I}_{(W_r > k)} dr \leq t \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\int_0^{\tau_k^W} \mathbb{I}_{(W_r > k)} dr + \int_{\tau_k^W}^T \mathbb{I}_{(W_r > k)} dr \leq t, \tau_k^W \leq t \right) \\ &= \int_0^t \mathbb{P} \left(\int_0^{\tau_k^W} \mathbb{I}_{(W_r > k)} dr + \int_{\tau_k^W}^T \mathbb{I}_{(W_r > k)} dr \leq t \mid \tau_k^W = s \right) h(s; k, W) ds \\ &= \int_0^t \mathbb{P} \left(\int_0^s \mathbb{I}_{(W_r > k)} dr + \int_s^T \mathbb{I}_{(W_r > k)} dr \leq t \right) h(s; k, W) ds \\ &= \int_0^t \mathbb{P} \left(s + \int_s^T \mathbb{I}_{(W_r > W_s)} dr \leq t \right) h(s; k, W) ds \\ &= \int_0^t \mathbb{P} \left(\int_s^T \mathbb{I}_{(W_r - W_s > 0)} dr \leq t - s \right) h(s; k, W) ds \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\stackrel{\text{Markov}}{\equiv} \int_0^t \mathbb{P} \left(\int_0^{T-s} \mathbb{I}_{(W_r^* > 0)} dr \leq t - s \right) h(s; k, W) ds, \quad (1.15)$$

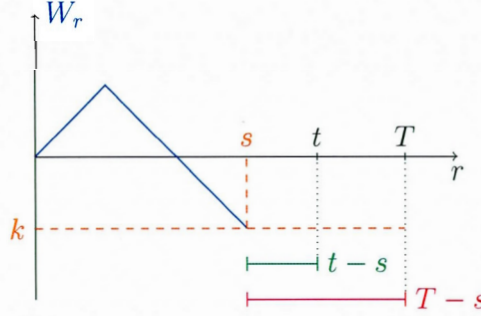
où $W^* = (W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard qui est indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_k^W}^W$. Voir la figure 1.3 pour une illustration de cette dernière étape avec une trajectoire fixée.

Donc,

$$\mathbb{P} \left(A_T^{W,+,k} \leq t \right) = \int_0^t \mathbb{P} \left(A_{T-s}^{W^*,+,0} \leq t - s \right) h(s; k, W) ds.$$

• Pour $k > 0$ et $0 \leq t \leq T$, nous avons l'identité suivante :

Figure 1.4 La conditionnement sur la première fois que W atteint la valeur k et l'utilisation de la propriété de Markov afin de passer de (1.13) à (1.14).



$$A_T^{W,+,k} \stackrel{p.s.}{=} T - A_T^{W,-,k} \stackrel{d}{=} T - A_T^{X,+, -k}, \quad (1.16)$$

où $A_T^{W,-,k} \stackrel{d}{=} A_T^{X,+, -k}$ est facile à vérifier en utilisant le fait que $B_s \stackrel{d}{=} -B_s$. Voir la figure 1.4 pour une illustration de l'identité (1.15).

Nous avons donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(A_T^{W,+,k} \leq t \right) &\stackrel{(1.15)}{=} \mathbb{P} \left(T - A_T^{X,+, -k} \leq t \right) \\ &= \mathbb{P} \left(A_T^{X,+, -k} \geq T - t \right) \\ &= 1 - \mathbb{P} \left(A_T^{X,+, -k} \leq T - t \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser le résultat que nous avons obtenu pour $k < 0$ pour trouver $\mathbb{P} \left(A_T^{X,+, -k} \leq T - t \right)$ car $(-k) < 0$. Ce qui nous donne que,

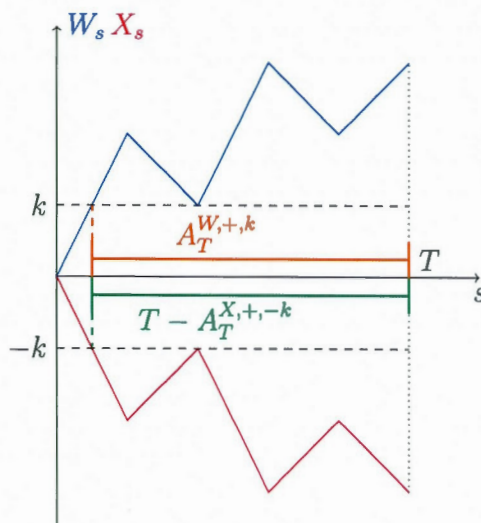
$$\mathbb{P} \left(A_T^{W,+,k} \leq t \right) = 1 - \int_0^{T-t} \mathbb{P} \left(A_{T-s}^{X^*,+,0} \leq T - t - s \right) h(s, -k; X) ds.$$

□

1.2.1 La forme fermée de $\mathbb{P} \left(A_T^{W,+,k} \leq t \right)$

La forme fermée de cette fonction de répartition a été dérivée dans ?. La dérivation est très technique du point de vue des calculs mais tous les détails sont

Figure 1.5 Un exemple de l'égalité en loi $A_T^{W,+,k} \stackrel{d}{=} T - A_T^{X,+,-k}$ avec des trajectoires fixées.



bien expliqués dans ?. Nous présenterons d'abord deux définitions. Ensuite, nous allons présenter la forme explicite de cette fonction de répartition. La raison pour laquelle des solutions de forme fermée sont d'intérêt pour nous est bien dite dans ?, "Il y a une nécessité pratique et un intérêt pour ces solutions explicites si elles sont disponibles, surtout lorsqu'il s'agit d'options exotiques, où les méthodes d'approximation, par exemple : intégration numérique, simulation Monte Carlo ou l'approximation partreillis, échouent souvent ou, au moins, consomment d'énormes ressources de temps de calcul."

Définition 1.2.3. Pour tout $0 \leq t < T$ et $k < 0$ la fonction $F_A^+(t; T, k, W)$ est définie comme,

$$F_A^+(t; T, k, W) = \int_0^t \mathbb{P} \left(A_{T-s}^{W,+,0} \leq t - s \right) h(s; k, W) ds.$$

Définition 1.2.4. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\rho \in (-1, 1)$ nous allons définir $\Phi(x, y; \rho)$ comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée et réduite

bivariée, c'est-à-dire,

$$\Phi(x, y; \rho) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{v^2 - 2\rho uv + u^2}{2(1-\rho^2)}} dudv.$$

Théorème 1.2.2. (?) la forme fermée de $\mathbb{P}(A_T^{W,+,k} \leq t)$, pour $k < 0$, est donnée par,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_T^{W,+,k} \leq t) &= F_A^+(t; T, k, W) \\ &= (3 + 2k\mu + 2\mu^2 T) e^{2k\mu} \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{T}} + \mu\sqrt{T}, -\mu\sqrt{T-t}; -\sqrt{1-\frac{t}{T}}\right) \\ &\quad + \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{T}} - \mu\sqrt{T}, \mu\sqrt{T-t}; -\sqrt{1-\frac{t}{T}}\right) \\ &\quad - (1 + 2k\mu + 2\mu^2 t) e^{2k\mu} \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{t}} - \mu\sqrt{t}\right) \Phi(-\mu\sqrt{T-t}) \\ &\quad + \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{t}} - \mu\sqrt{t}\right) \Phi(-\mu\sqrt{T-t}) \\ &\quad - 2\mu\sqrt{\frac{t}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{t}} - \mu\sqrt{t}\right)^2} \Phi(-\mu\sqrt{T-t}) \\ &\quad + 2\mu\sqrt{\frac{T}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{T}} - \mu\sqrt{T}\right)^2} \Phi\left(k\sqrt{\frac{1}{t} - \frac{1}{T}}\right) \\ &\quad - 2\mu\sqrt{\frac{T-t}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mu^2(T-t)} e^{2k\mu} \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{t}} - \mu\sqrt{t}\right), \end{aligned}$$

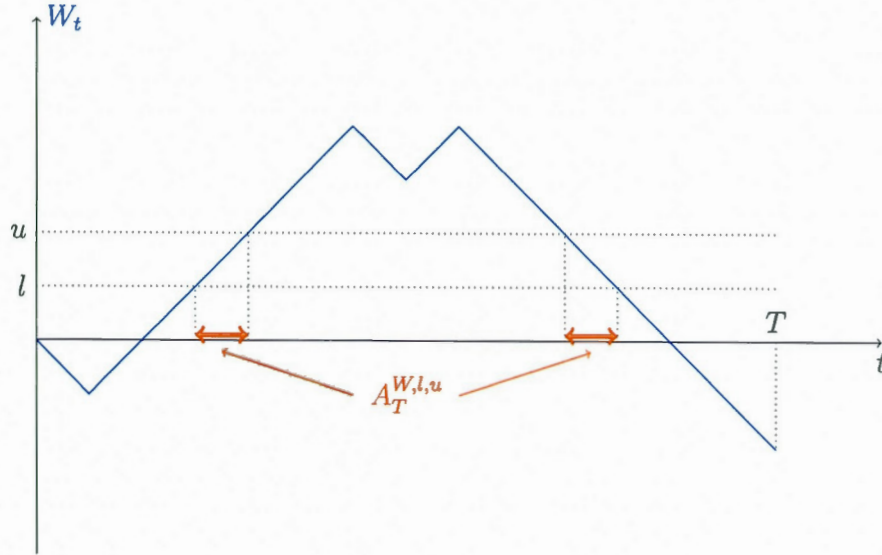
et pour $k > 0$,

$$\mathbb{P}(A_T^{W,+,k} \leq t) = 1 - F_A^+(T-t; T, -k, X).$$

1.3 La loi du temps d'occupation d'un intervalle

Avec une motivation similaire à celle de Akahori, pour trouver le prix de certaines options exotiques basées sur les temps d'occupation, Fusai a dérivé la fonction caractéristique du temps d'occupation d'un intervalle du mouvement brownien avec dérive $\mu \in \mathbb{R}$. Dans cette section, nous allons présenter son résultat principal. Les preuves seront omises, car elles sont très techniques du point de vue des calculs.

Figure 1.6 Le temps d'occupation de l'intervalle (l, u) par W .



Pour ceux qui s'intéressent à tous les détails, voir ?. Les résultats de cette section ne seront pas utilisés par la suite.

Définition 1.3.1. Soit $l, u \in \mathbb{R}$ tel que $l < u$. Le temps d'occupation de l'intervalle (l, u) par W , noté $A_T^{W,l,u}$, est la durée pendant laquelle le processus, W , reste dans l'intervalle (l, u) jusqu'à un temps fixé, $T \geq 0$, c'est-à-dire,

$$A_T^{W,l,u} := \int_0^T \mathbb{I}_{(l < W_t < u)} dt.$$

Voir la figure 1.6 pour une illustration de la définition 1.3.1.

Définition 1.3.2. La fonction caractéristique de $A_t^{W,l,u}$ est définie comme suit,

$$\psi(t, \zeta, x) := \psi(t, \zeta, x; l, u, W) = \mathbb{E}_x \left[e^{i\zeta A_t^{W,l,u}} \right],$$

où $t \geq 0$ est fixé et $x, \zeta \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.3.1. (?) La fonction caractéristique de $A_t^{W,l,u}$ peut être représentée de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \psi(t, \zeta, x; l, u, W) &= \Psi(t, \zeta, x; l, u, W) \\ &+ \begin{cases} \mathbb{P} \left(\inf_{0 \leq s \leq t} W_s > u \right), & \text{si } x \in [u, \infty), \\ e^{i\zeta t} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} W_s < u, \inf_{0 \leq s \leq t} W_s > l \right), & \text{si } x \in (u, l), \\ \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} W_s < l \right), & \text{si } x \in (-\infty, l], \end{cases} \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned} \Psi(t, \zeta, x; l, u, W) &:= \int_0^t e^{i\zeta y} \mathbb{P} \left(A_t^{W,l,u} \in dy \right) \\ &= e^{-\mu x - \frac{\mu^2}{2}t} \mathcal{L}_{\gamma \rightarrow t}^{-1} \{ \xi(\gamma, \zeta, x; l, u, W) \}, \end{aligned}$$

avec,

$$\xi(\gamma, \zeta, x; l, u, W) = \begin{cases} e^{-\sqrt{2}(x-u)\sqrt{\gamma}} \mathcal{L}_{t \rightarrow \gamma} \{ \gamma(t, 1) \}, & \text{si } x \in [u, \infty), \\ \frac{1}{\sinh(a\pi)} \left[\mathcal{L}_{t \rightarrow \gamma} \{ \gamma(t, 0) \} \sinh \left(a\pi \left(\frac{u-x}{u-l} \right) \right) \right. \\ \quad \left. + \mathcal{L}_{t \rightarrow \gamma} \{ \gamma(t, 1) \} \sinh \left(a\pi \left(\frac{x-l}{u-l} \right) \right) \right], & \text{si } x \in (u, l), \\ e^{-\sqrt{2}(l-x)\sqrt{\gamma}} \mathcal{L}_{t \rightarrow \gamma} \{ \gamma(t, 0) \}, & \text{si } x \in (-\infty, l], \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{t \rightarrow \gamma} \{ \gamma(t, 1) \} = \frac{e^{\mu u}}{\sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma} - \frac{\mu}{\sqrt{2}})} - \frac{c}{2\sqrt{\gamma}}(e(\gamma) + d(\gamma)),$$

$$\mathcal{L}_{t \rightarrow \gamma} \{ \gamma(t, 0) \} = \frac{e^{\mu l}}{\sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma} + \frac{\mu}{\sqrt{2}})} + \frac{c}{2\sqrt{\gamma}}(e(\gamma) - d(\gamma)),$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{\gamma}} d(\gamma) = & \frac{\sqrt{\gamma - i\zeta} \sinh(a\pi)}{\sqrt{\gamma - i\zeta} \sinh(a\pi) + \sqrt{\gamma} (\cosh(a\pi) + 1)} \\ & \cdot \left(\frac{e^{\mu u}}{\sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma} - \frac{\mu}{\sqrt{2}})} + \frac{e^{\mu l}}{\sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma} + \frac{\mu}{\sqrt{2}})} \right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{\gamma - i\zeta} \sinh(a\pi)(\gamma - i\zeta - \frac{\mu^2}{2})} \\ & \cdot \left[\left\{ \frac{-\mu}{\sqrt{2}} (e^{\mu l} - e^{\mu u}) (\cosh(a\pi) + 1) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sqrt{\gamma - i\zeta} (e^{\mu l} - e^{\mu u}) \sinh(a\pi) \right\} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{\gamma}} e(\gamma) = & \frac{\sqrt{\gamma - i\zeta} \sinh(a\pi)}{\sqrt{\gamma - i\zeta} \sinh(a\pi) + \sqrt{\gamma} (\cosh(a\pi) - 1)} \\ & \cdot \left(\frac{e^{\mu u}}{\sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma} - \frac{\mu}{\sqrt{2}})} + \frac{e^{\mu l}}{\sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma} + \frac{\mu}{\sqrt{2}})} \right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{\gamma - i\zeta} \sinh(a\pi)(\gamma - i\zeta - \frac{\mu^2}{2})} \\ & \cdot \left[\left\{ \frac{-\mu}{\sqrt{2}} (e^{\mu u} - e^{\mu l}) (\cosh(a\pi) - 1) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sqrt{\gamma - i\zeta} (e^{\mu u} - e^{\mu l}) \sinh(a\pi) \right\} \right], \end{aligned}$$

et,

$$a\pi = \sqrt{\frac{\gamma - i\zeta}{c^2}}, \quad c^2 = \frac{1}{2(u-l)^2}.$$

Démonstration. Avec la définition 1.3.2. nous avons que,

$$\begin{aligned} \psi(t, \zeta, x) &= \mathbb{E}_x \left[e^{i\zeta A_t^{W,l,u}} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[e^{i\zeta \int_0^t \mathbb{I}_{(l < W_s < u)} ds} \right] \\ &= \int_0^t e^{i\zeta y} \mathbb{P} \left(A_t^{W,l,u} \in dy \right) + 1 \cdot \mathbb{P} \left(A_t^{W,l,u} = 0 \right) + e^{i\zeta t} \cdot \mathbb{P} \left(A_t^{W,l,u} = t \right), \end{aligned} \tag{1.17}$$

où $t \geq 0$ et $x, \zeta \in \mathbb{R}$. En fixant ζ et en appliquant le théorème de Feynman-Kac de la p.366 de ? nous avons que $\psi(t, x; \zeta)$ doit satisfaire à l'équation aux dérivées

partielles suivante,

$$-\psi_t + i\zeta \mathbb{I}_{(l < x < u)} \psi + \frac{1}{2} \psi_{xx} + \mu \psi_x = 0,$$

avec la condition initiale,

$$\psi(0, x; \zeta) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

et les conditions aux limites,

$$\psi(t, \pm\infty; \zeta) = 1, \quad \forall t > 0.$$

La résolution de cette équation aux dérivées partielles déborde le cadre de ce mémoire. Pour ceux qui s'intéressent à la solution, voir l'annexe A dans ?.

□

Remarque. Nous avons des masses dans (1.12) à $y = 0$ et $y = t$ parce que, selon x , il est possible que $(W_s)_{s \geq 0}$ soit supérieur à u pour tout $s \in [0, t]$ ou inférieur à l pour tout $s \in [0, t]$.

Dans ce mémoire, nous n'allons pas appliquer les résultats de cette section parce que les applications financières de cette section nécessiteraient l'inversion de la fonction caractéristique. Cette inversion nécessite de nombreuses méthodes numériques qui sont en dehors du champ d'application de ce mémoire. Pour ceux qui sont intéressés par les applications financières de ces résultats, ? est une excellente thèse avec beaucoup d'informations sur le sujet.

CHAPITRE II

APPLICATIONS DES TEMPS D'OCCUPATION EN FINANCE

Dans ce chapitre, nous allons principalement discuter de certains des résultats de Linetsky (1999), en commençant par les options escalier. Pour une introduction très complète aux options escalier, voir Linetsky (1999). Une option escalier est une généralisation d'une option barrière "knock-out". Une option barrière "knock-out" est une option où la valeur de l'option est instantanément annulée au moment où le prix de l'actif sous-jacent atteint une certaine barrière prédéterminée. Ceci est fait avec le but de réduire le prix de l'option pour les investisseurs qui ne veulent pas payer pour des scénarios improbables résultant des changements extrêmes dans le prix de l'actif sous-jacent. Par exemple, disons que tu achètes une option d'achat sur une action qui vaut \$50. En achetant cette option, tu paries que le prix de l'action va augmenter. Si tu crois, qu'il est très peu probable que le prix de l'action descende en dessous de \$10 d'ici à l'échéance, tu peux ajouter une barrière au contrat qui annule la valeur de l'option si le prix de l'action descend en dessous de \$10. Cela te permet de réduire le coût de votre option.

Quand une banque vend une option, son but n'est pas de faire un profit sur l'option elle-même. L'objectif des banques est de neutraliser le risque de l'option avec un portefeuille de réplication et de profiter sur le *spread*. Un portefeuille de réplication est un portefeuille d'actifs financiers (actions, obligations, etc...) qui reproduit la

valeur de l'option. Le *spread* est la différence entre le prix de l'option qu'ils vendent et le coût du portefeuille répliquant qu'ils achètent. Aux fins de ce mémoire tout ce qu'on a besoin de savoir, c'est que pour décider quoi acheter dans un portefeuille répliquant, les dérivées partielles du prix de l'option sont nécessaires. Un aspect négatif des options à barrière, c'est que le prix n'est pas lisse à la barrière donc les dérivées partielles sont inaccessibles. Cela provoque des problèmes de couverture. Les options escalier sont similaires aux options barrière "knock-out" à l'exception du fait qu'elles sont peu à peu annulées quand elles sont au-dessus ou en dessous d'une certaine barrière prédéterminée au lieu d'être instantanément annulées. Un des avantages de ces types d'options est que le prix est lisse à la barrière et donc les dérivées partielles peuvent être facilement obtenues à des fins de couverture. La couverture sera discutée avec plus de détails à la section 2.1.3. Quelques autres aspects négatifs des options barrière standard qui peuvent être résolus par les options escalier sont :

- Avec une option barrière "knock-out" les investisseurs perdent la totalité de leur investissement s'il y a une percée à court terme à travers la barrière même s'ils ont correctement anticipés la direction générale du prix de l'actif sous-jacent.
- Étant donné que, pour les options barrière standards, tout franchissement de la barrière, peu importe sa taille, a un effet énorme sur le prix de l'option, certains grands acteurs du marché pourraient être incités à manipuler le marché, possiblement par des moyens illégaux, pour forcer le prix de l'actif sous-jacent à travers la barrière. Voir Linetsky (1999) p.57 pour un exemple concret intéressant.
- Avec des options barrière "knock-out", il y a un tourbillon d'activités lorsque les prix des actifs sous-jacents sont près des barrières populaires, ce qui crée de la congestion et de la volatilité. Voir Linetsky (1999) p.56 pour un exemple concret intéressant.

Il y a beaucoup de types différents d'options escalier. Pour un catalogue des différents types d'options escalier, voir Linetsky (1999). Celui sur lequel nous allons nous concentrer dans cette section est l'option d'achat escalier exponentielle vers le bas. Cette option est une option d'achat vanille avec un paiement à l'échéance qui est annulé par un facteur de, $e^{-\rho A_T^{S,-,b}}$, où $\rho > 0$ est appelé le taux d'annulation. Dans ce chapitre, nous allons présenter la démonstration de Linetsky du prix de cette option et le prix de l'option de vente correspondante. Nous présenterons également la dérivation de Linetsky du delta de l'option d'achat escalier exponentielle vers le bas et nous allons discuter du gamma de l'option d'achat. Ensuite, Linetsky (1999) a montré que nous pouvons utiliser les résultats obtenus à partir des options d'achat escalier exponentielle vers le bas pour calculer le prix des options parisiennes cumulatives. Une option parisienne cumulative est une option vanille qui est immédiatement annulée si l'actif sous-jacent passe une certaine quantité de temps au-dessus ou en dessous d'une barrière. Les options parisiennes cumulatives seront discutées en détail dans la section 2.2.1. De plus, nous pouvons utiliser le prix d'une option escalier pour dériver la loi jointe de $(B_T^x, A_T^{B^x,-,0})$, où $B^x = (B_t^x)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard qui commence à x , c'est-à-dire $B_0 = x$. Cela sera fait en utilisant les méthodes de Feynman-Kac. Dans la dernière section de ce chapitre, nous allons discuter des options corridor. Ce sont des options dont le paiement dépend de la quantité de temps que l'actif sous-jacent séjourne dans un certain intervalle. Nous allons présenter des formules fermées pour le prix de deux types d'options corridor qui ont été présentés dans ? : les options à un swap et à deux swaps.

2.1 Les options escalier

Dans cette section, nous allons d'abord présenter la dérivation de Linetsky du prix d'une option escalier exponentielle vers le bas. Nous présenterons ensuite

le prix de l'option de vente correspondante et dans la dernière sous-section nous allons discuter de la réplication dynamique des options escalier exponentielles vers le bas ; plus précisément, nous allons présenter le calcul du delta et discuter du gamma. Tout calcul se fera dans le modèle de Black-Scholes-Merton (BSM). Pour nos besoins, cela signifie que le prix de l'actif sous-jacent sera modélisé par un mouvement brownien géométrique, c'est-à-dire que le prix des actifs sous-jacents sera modélisé par un processus stochastique $S = (S_t)_{t \geq 0}$, où $S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $S_0, \sigma > 0$ et $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard. Pour plus d'informations, voir ?. Les prix de ces options seront trouvés de la façon standard, c'est-à-dire, nous allons calculer l'espérance sous la mesure martingale équivalente du paiement à l'échéance actualisé. Le taux d'actualisation utilisé sera le taux sans risque qui sera constant et noté $r \geq 0$. Pour plus d'informations, voir ?.

2.1.1 Le prix d'une option d'achat escalier exponentielle vers le bas

Nous allons commencer par quelques définitions et ensuite passer au théorème principal de cette section qui est le prix d'une option escalier exponentielle vers le bas. La preuve de ce théorème est longue et sera complétée en annexe.

Définition 2.1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous allons définir la fonction $\phi(x)$ comme la fonction de densité d'une variable aléatoire normale centrée et réduite, c'est-à-dire,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Définition 2.1.2. Une option escalier exponentielle vers le bas est une option avec paiement à l'échéance $T > 0$,

$$g(S_T, A_T^{S, -, b}) := e^{-\rho A_T^{S, -, b}} (S_T - K)^+,$$

où $\rho > 0$ est appelé le taux d'annulation, $b > 0$ est appelée la barrière et $K > 0$ est appelé le prix d'exercice.

Voir la figure 2.1 pour une illustration d'un paiement à l'échéance pour une option escalier exponentielle vers le bas.

Remarque. *Il existe plusieurs types d'options escalier. Dans ce mémoire, nous traiterons seulement la version exponentielle qui est définie dans la définition 2.1.2. À partir de maintenant, nous allons omettre le mot "exponentielle" quand on parle d'options escalier. Pour ceux qui sont intéressés par les différents types d'options escalier voir Linetsky (1999).*

Remarque. *Nous pouvons voir que, avec une option escalier, si les investisseurs ont correctement anticipés l'orientation générale du marché, mais que l'option traverse la barrière légèrement, ils recevront encore la majorité de leur paiement. Les grands acteurs du marché sont moins incités à manipuler le marché étant donné que l'effet d'un léger franchissement de la barrière n'est pas drastique, si ρ n'est pas trop élevé. Également, parce qu'une légère traversée de la barrière n'a pas un effet drastique pour une option escalier, il y aura moins de volatilité autour des barrières populaires.*

Avant de présenter le théorème principal de cette section, voici une liste de notations qui seront utilisées dans cette section :

$$\nu = \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right), \quad \gamma = r + \frac{\nu^2}{2}, \quad (2.1)$$

$$x = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{S_0}{b} \right), \quad k = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{b} \right), \quad (2.2)$$

$$d_1 = \frac{-k + x + \nu T}{\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{T},$$

$$d_3 = \frac{-k - x + \nu T}{\sqrt{T}},$$

$$d_4 = d_3 + \sigma\sqrt{T},$$

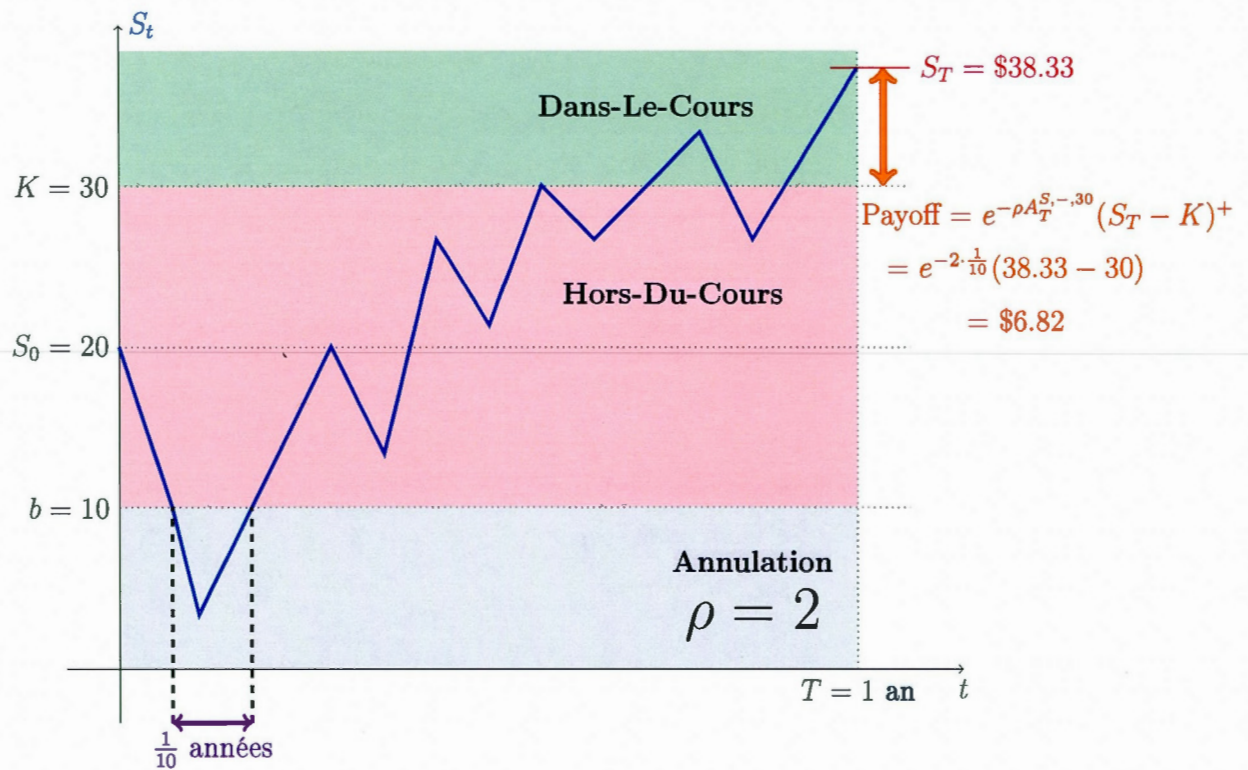
$$d_5 = \frac{-k - x + \nu t}{\sqrt{t}},$$

$$d_6 = d_5 + \sigma\sqrt{t},$$

$$d_7 = \frac{-k + \nu t}{\sqrt{t}},$$

$$d_8 = d_7 + \sigma\sqrt{t},$$

Figure 2.1 Une illustration d'un paiement à l'échéance pour une option escalier exponentielle vers le bas



$$C_1 = 1 - \frac{x^2}{T-t} - \nu x, \quad C_2 = t^{-\frac{1}{2}} C_1 - t^{-\frac{3}{2}} x k, \quad C_3 = C_1 - \sigma x.$$

Théorème 2.1.1. (?) *Le prix initial d'une option d'achat escalier vers le bas est une fonction, notée $C_\rho^-(S_0; T, K, b)$, continue et dérivable qui est donnée par :*

(i) *pour $S_0 \geq b$ et $K \geq b$,*

$$\begin{aligned} C_\rho^-(S_0; T, K, b) = & S_0 \Phi(d_2) - K e^{-rT} \Phi(d_1) - \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \left[\left(\frac{b^2}{S_0} \right) \Phi(d_4) - K e^{-rT} \Phi(d_3) \right] \\ & + \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{-\gamma(T-t)}}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} \\ & \cdot \left[(\nu + \sigma) \left(\frac{b^2}{S_0} \right) \Phi(d_6) - \nu e^{-rT} K \Phi(d_5) \right] dt, \end{aligned}$$

(ii) *pour $S_0 \leq b$ et $K \geq b$,*

$$\begin{aligned} C_\rho^-(S_0; T, K, b) = & \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{\nu}{\sigma}} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{-\gamma(T-t)}}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} \\ & \cdot \left[(\nu + \sigma) C_3 b \Phi(d_8) - \nu C_1 e^{-rT} K \Phi(d_7) \right. \\ & \left. - \sigma x t^{-\frac{1}{2}} b \phi(d_8) \right] e^{-\frac{\sigma^2}{2(T-t)} t} dt, \end{aligned}$$

(iii) *pour $S_0 \geq b$ et $K \leq b$,*

$$\begin{aligned} & C_\rho^-(S_0; T, K, b) \\ = & e^{-\gamma T - \nu x} \left[b \left\{ e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^{ii}(-(\nu + \sigma), 0, -x; T) - \Psi_{-\rho}^{ii}(-(\nu + \sigma), -k, -x; T)] \right. \right. \\ & \left. \left. + \Psi_\rho^i(\nu + \sigma, 0, x; T) \right\} \right. \\ & \left. - K \left\{ e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^{ii}(-\nu, 0, -x; T) - \Psi_{-\rho}^{ii}(-\nu, -k, -x; T)] \right. \right. \\ & \left. \left. + \Psi_\rho^i(\nu, 0, x; T) \right\} \right], \end{aligned}$$

(iv) pour $S_0 \leq b$ et $K \leq b$,

$$\begin{aligned}
& C_{\rho}^{-}(S_0; T, K, b) \\
&= e^{-\gamma T - \nu x} \left[b \left\{ e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^i(-(\nu + \sigma), 0, -x; T) - \Psi_{-\rho}^i(-(\nu + \sigma), -k, -x; T)] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Psi_{\rho}^{ii}(\nu + \sigma, 0, x; T) \right\} \right. \\
&\quad \left. - K \left\{ e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^i(-\nu, 0, -x; T) - \Psi_{-\rho}^i(-\nu, -k, -x; T)] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Psi_{\rho}^{ii}(\nu, 0, x; T) \right\} \right],
\end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned}
& \Psi_{\rho}^i(\nu; k, x, T) \\
&= e^{\nu x + \frac{\nu^2 T}{2}} \Phi(d_1) - e^{-\nu x + \frac{\nu^2 T}{2}} \Phi(d_3) \\
&\quad + e^{-\nu x} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\frac{\nu^2 t}{2}} \left[\nu \Phi(d_5) + t^{-\frac{1}{2}} \phi(d_5) \right] dt,
\end{aligned}$$

et,

$$\Psi_{\rho}^{ii}(\nu; k, x, T) = \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\frac{\nu^2 t}{2} - \frac{x^2}{2(T-t)}} [\nu C_1 \Phi(d_7) + C_2 \phi(d_7)] dt.$$

Remarque. Avant de commencer la démonstration du théorème 2.1.1. nous avons besoin de passer en revue un détail. Dans la démonstration qui suit, nous allons utiliser des mesures de Dirac et des "fonctions" delta de Dirac. Une mesure de Dirac, δ_a , est définie comme suit : soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ un espace mesurable où \mathcal{B} est la σ -algèbre de Borel. Pour $a \in \mathbb{R}$,

$$\delta_a(A) = \mathbb{I}_{(a \in A)} = \begin{cases} 0, & a \notin A, \\ 1, & a \in A, \end{cases}$$

$\forall A \in \mathcal{B}$. De plus,

$$\delta_a(A) = \int_A \delta_a(dx),$$

et pour la preuve suivante nous avons besoin de la propriété suivante des mesures de Dirac,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \delta_a(dx) = f(a),$$

où f est une fonction assez régulière. La "fonction" delta de Dirac, notée $\delta_a(x)$, est symboliquement définie comme suit : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 0, & x \neq a, \\ \infty, & x = a. \end{cases}$$

Pour la démonstration suivante, nous avons besoin des "propriétés" suivantes des "fonctions" delta de Dirac,

$$\delta_a(x) = \delta_{x-a}(0) = \delta_{a-x}(0)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \delta_a(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \delta_a(x) dx = f(a).$$

Afin de simplifier la notation, nous allons parfois écrire,

$$\delta_{x-a} := \delta_{x-a}(0).$$

Notez que la "fonction" delta de Dirac n'est pas vraiment une fonction. C'est ce qu'on appelle une fonction généralisée, pour ceux qui sont intéressés voir ?. La définition et les "propriétés" ci-dessus sont des abus de notation pratiques qui sont utilisés par les physiciens.

Démonstration. Le prix initial de cette option est donné par,

$$C_p^-(S_0; T, K, b) = e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[e^{\rho A_T^{S_0, b}} (S_T - K)^+ \right], \quad (2.3)$$

où E_{S_0} est l'espérance d'un mouvement brownien géométrique qui commence à S_0 et qui résoudra l'équation différentielle stochastique $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t$ c'est-à-dire $S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$, où B_t est un MBS.

Ceci implique que, avec (2.1) et (2.2), nous pouvons réécrire S_t comme,

$$S_t = be^{\sigma x} e^{\sigma \nu t + \sigma B_t} = be^{\sigma(\nu t + (B_t + x))} = be^{\sigma(W_t^{BSM} + x)}, \quad (2.4)$$

où $W^{BSM} = (W_t^{BSM})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien avec dérive $\nu = \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$.

Cela nous donne que :

$$\begin{aligned} C_\rho^-(S_0; T, K, b) &= e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[e^{-\rho A_T^{S, -, b}} (S_T - K) \mathbb{I}_{(S_T \geq K)} \right] \\ &\stackrel{(2.4)}{=} e^{-rT} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{W^{BSM}, -, 0}} \left(be^{\sigma W_T^{BSM}} - K \right) \mathbb{I}_{(be^{\sigma W_T^{BSM}} \geq K)} \right] \\ &\stackrel{\text{Girsanov}}{=} e^{-rT} \mathbb{E}_x \left[e^{\nu(B_T - x) - \frac{\nu^2}{2} T} e^{-\rho A_T^{B, -, 0}} (be^{\sigma B_T} - K) \mathbb{I}_{(be^{\sigma B_T} \geq K)} \right] \\ &\stackrel{(2.2)}{=} e^{-\gamma T - \nu x} \mathbb{E}_x \left[e^{\nu B_T - \rho A_T^{B, -, 0}} (be^{\sigma B_T} - K) \mathbb{I}_{(B_T \geq k)} \right] \\ &= e^{-\gamma T - \nu x} [b\Psi_\rho(\nu + \sigma; k, x, T) - K\Psi_\rho(\nu; k, x, T)], \end{aligned} \quad (2.5)$$

où \mathbb{E}_x est l'espérance d'un mouvement brownien qui commence à x et,

$$\begin{aligned} \Psi_\rho(\theta; k, x, T) &:= \mathbb{E}_x \left[e^{\theta B_T - \rho A_T^{B, -, 0}} \mathbb{I}_{(B_T \geq k)} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[e^{\theta B_T - \rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{B_T}([k, \infty)) \right] \\ &= \int_k^\infty \mathbb{E}_x \left[e^{\theta B_T - \rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{B_T}(dz) \right] \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \mathbb{E}_x \left[\int_k^\infty e^{\theta B_T - \rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{B_T}(dz) \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\int_k^\infty e^{\theta B_T - \rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{B_T}(z) dz \right] \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_k^\infty \mathbb{E}_x \left[e^{\theta B_T - \rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{B_T}(z) \right] dz \\ &= \int_k^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{\theta y - \rho t} \delta_y(z) \mathbb{P}(B_T \in dy, A_T^{B, -, 0} \in dt) dz \\ &= \int_k^\infty \int_0^\infty e^{\theta z - \rho t} \mathbb{P}(B_T \in d(z), A_T^{B, -, 0} \in dt) dz \\ &= \int_k^\infty \int_0^\infty e^{\theta z} \int_{-\infty}^\infty e^{-\rho t} \delta_y(z) \mathbb{P}(B_T \in dy, A_T^{B, -, 0} \in dt) dz \\ &= \int_k^\infty e^{\theta z} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{B_T}(z) \right] dz \end{aligned}$$

$$= \int_k^\infty e^{\theta z} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{z-B_T}(0) \right] dz, \quad (2.6)$$

où $\delta_a(dx)$ est une mesure de Dirac et $\delta_a(x)$ est la fonction de delta de Dirac.

Remarque. *l'équation (2.6) peut être écrit en utilisant une notation plus probabiliste c'est-à-dire,*

$$\int_k^\infty e^{\theta z} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{z-B_T}(0) \right] dz =: \int_k^\infty e^{\theta z} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B, -, 0}}; B_T \in dz \right].$$

Nous allons terminer la présentation de cette preuve en quatre étapes. Un résumé de ces quatre étapes est donné dans les paragraphes suivants et tous les détails et discussions sont présentés dans l'annexe B.1.1. Les étapes suivantes sont une application des méthodes de Feynman-Kac. Les quatre étapes pour calculer $C_\rho^-(S_0; T, K, b)$ sont les suivantes :

1. Pour commencer, nous allons calculer $\mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{z-B_T}(0) \right]$. Pour ce faire, nous allons définir $\Lambda_\rho(z, x; T) := \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{z-B_T}(0) \right]$ et puis nous allons prendre la transformée de Laplace de $\Lambda_\rho(z, x; T)$ par rapport à T . Nous appellerons cette transformée de Laplace $G_\rho(z, x; s)$. Nous allons ensuite appliquer le théorème 1.1.2. (les méthodes de Feynman-Kac), qui nous donnent que $G_\rho(z, x; s)$ doit satisfaire l'équation différentielle suivante,

$$\frac{1}{2} G_{xx} - (s + \rho \mathbb{I}_{(x < 0)}) G = -\delta_{(x-z)}.$$

Cette équation différentielle sera résolue en utilisant la méthode de variation des paramètres.

2. Après avoir calculé $G_\rho(z, x; s)$ nous allons l'utiliser pour calculer $\Lambda_\rho(z, x; T)$. Pour ce faire, il ne faut pas oublier que la fonction $G_\rho(z, x; s)$, que nous avons calculée dans la première étape, est la transformée de Laplace de $\Lambda_\rho(z, x; T)$ par rapport à T . Donc, pour calculer $\Lambda_\rho(z, x; T)$ nous allons prendre la transformée de Laplace inverse de $G_\rho(z, x; s)$.

3. Après avoir calculé $\Lambda_\rho(z, x; T)$ nous allons l'utiliser pour calculer $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$.

Pour ce faire, nous devons calculer l'intégrale (2.6), c'est-à-dire nous devons calculer,

$$\Psi_\rho(\nu; k, x, T) = \int_k^\infty e^{\nu z} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{z-B_T}(0) \right] dz \equiv \int_k^\infty e^{\nu z} \Lambda_\rho(z, x; T) dz.$$

Cette intégrale n'est pas difficile à calculer mais le calcul est long et fastidieux.

4. Finalement, pour la dernière étape, nous allons calculer $C_\rho^-(S; T, K, b)$ en insérant notre réponse pour $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ de l'étape 3 dans l'équation (2.5), c'est-à-dire nous allons incorporer notre réponse pour $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ de l'étape 3 dans,

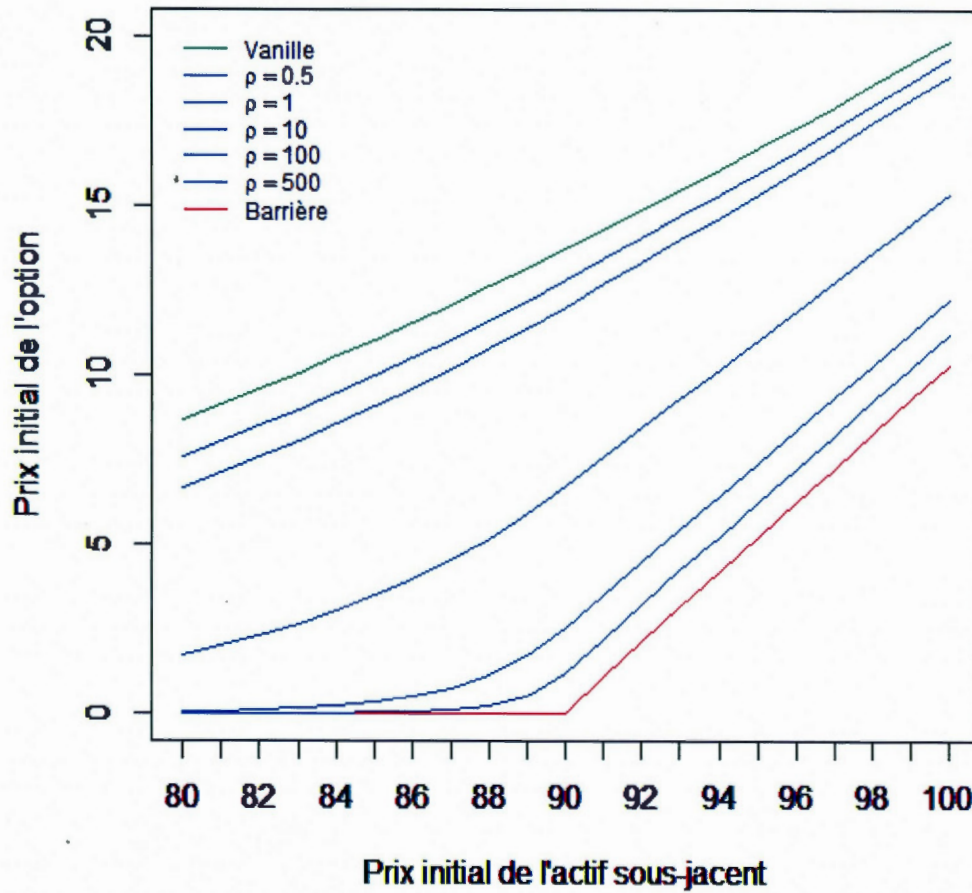
$$C_\rho^-(S_0; T, K, b) = e^{-\gamma T - \nu x} [b \Psi_\rho(\nu + \sigma; k, x, T) - K \Psi_\rho(\nu; k, x, T)].$$

□

Remarque. (concernant la figure 2.2) Nous pouvons voir que l'option vanille est toujours plus cher que l'option escalier qui est toujours plus cher que l'option barrière. C'est ce que nous attendons car l'option qui t'annule pas doit être plus cher que l'option qui t'annule lentement, ce qui devrait être plus cher que l'option qui t'annule instantanément. De plus, nous pouvons voir que si nous augmentons ρ le prix d'une option escalier converge vers le prix d'une option barrière. C'est ce que nous attendons car si ρ est très élevé, tout franchissement de la barrière va grandement réduire la valeur du paiement à l'échéance. En outre, si ρ tend vers zéro, le prix d'une option escalier converge vers le prix d'une option vanille. C'est aussi ce que nous prévoyons car si ρ est zéro, le facteur qui multiplie le paiement est 1 indépendamment de combien de temps l'actif sous-jacent passe en dessous de la barrière.

Maintenant que nous avons trouvé le prix initial d'une option d'achat escalier vers

Figure 2.2 Le prix initial d'une option vanille, escalier vers le bas, et barrière vers le bas contre le prix initial de l'actif sous-jacent pour différentes valeurs de ρ ($K = 95$, $b = 90$, $T = 1$, $r = 0.04$, $\sigma = 0.4$)



le bas nous pouvons facilement trouver le prix initial d'une option d'achat escalier vers le haut en utilisant le fait que $A_T^{S,-,b} + A_T^{S,+,b} \stackrel{\text{P.S.}}{=} T$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} C_\rho^+(S_0; T, K, b) &:= e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[e^{-\rho A_T^{S,+,b}} (S_T - K)^+ \right] \\ &= e^{-\rho T} e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[e^{\rho A_T^{S,-,b}} (S_T - K)^+ \right] \\ &= e^{-\rho T} C_{-\rho}^-(S_0; T, K, b). \end{aligned} \quad (2.7)$$

De plus, dès que nous avons le prix initial d'une option d'achat escalier vers le bas, nous pouvons trouver le prix d'une option d'achat escalier vers le bas au temps $t \in (0, T]$ assez facilement. Nous allons utiliser le fait que, en conditionnant sur \mathcal{F}_t^S ,

$$\begin{aligned} A_T^{S,-,b} &= A_t^{S,-,b} + \int_t^T \mathbb{I}_{(S_r < b)} dr \\ &= A_t^{S,-,b} + \int_t^T \mathbb{I}_{\left(\frac{S_t}{S_t} S_r < b\right)} dr \\ &\stackrel{d}{=} A_t^{S,-,b} + \int_t^T \mathbb{I}_{\left(S_t e^{\theta(r-t) + \phi B_{r-t}^*} < b\right)} dr \end{aligned}$$

où $B^* = (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard qui est indépendant de \mathcal{F}_t^B , $\phi > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Maintenant, avec un changement de variable nous avons que cette dernière ligne est égale à,

$$\begin{aligned} &= A_t^{S,-,b} + \int_0^{T-t} \mathbb{I}_{(S_t e^{\theta u + \phi B_u^*} < b)} du \\ &= A_t^{S,-,b} + \int_0^{T-t} \mathbb{I}_{(S_r^* < b)} dr \\ &:= A_t^{S,-,b} + A_{T-t}^{S^*,-,b}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

où S^* est un mouvement brownien géométrique qui est indépendant de \mathcal{F}_t^S et commence à S_t .

Avant de présenter le dernier résultat de cette section, nous devons introduire le lemme suivant.

Lemme 2.1.1. (?) Pour un $T > 0$ fixé, soit F et G deux fonctionnelles mesurables définies sur $C([0, T], \mathbb{R})$. Pour $\mu \in \mathbb{R}$,

$$F(W_t, t \leq T) \stackrel{d}{=} G(W_t, t \leq T) \text{ si et seulement si}$$

$$(F(W_t, t \leq T), W_T) \stackrel{d}{=} (G(W_t, t \leq T), W_T).$$

Le résultat suivant est une application du lemme 2.1.1. avec $F(W_t, t \leq T) = A_t^{S, -, b} | \mathcal{F}_t^S$ et $G(W_t, t \leq T) = A_t^{S, -, b} + A_{T-t}^{S^*, -, b} | \mathcal{F}_t^S$, qui sont les deux variables aléatoires définies dans (2.8).

Le prix d'une option d'achat escalier vers le bas au temps $t \in (0, T]$, noté $C_\rho^-(S_t, A_t^{S, -, b}, t; T, K, b)$, est donné par,

$$\begin{aligned} C_\rho^-(S_t, A_t^{S, -, b}, t; T, K, b) &:= \mathbb{E}_{S_0} \left[e^{-\rho A_T^{S, -, b}} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t^S \right] \\ &\stackrel{(2.8)}{=} e^{-\rho A_t^{S, -, b}} \mathbb{E}_{S_t} \left[e^{-\rho A_{T-t}^{S^*, -, b}} (S_{T-t}^* - K)^+ \right] \\ &= e^{-\rho A_T^{S, -, b}} C_\rho^-(S_t, T - t, K, b). \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.1.2. Le prix d'une option de vente escalier vers le bas

Linetsky (1999) nous a montré que nous pouvons facilement trouver la formule du prix initial de l'option de vente en fonction du prix de l'option d'achat correspondante, comme ce qui a été fait dans les équations (2.7) et (2.9).

Définition 2.1.3. Une option de vente escalier exponentielle vers le bas est une option avec un paiement à l'échéance $T > 0$,

$$e^{-\rho A_T^{S, -, b}} (K - S_T)^+.$$

Théorème 2.1.2. (?) *Le prix d'une option de vente escalier exponentielle vers le bas, noté $P_\rho^-(S_0; T, K, b)$ est donné par l'équation suivante,*

$$P_\rho^-(S_0; T, K, b) = e^{-\gamma T - \nu x - \rho T} [K \Psi_{-\rho}(-\nu; -k, -x, T) - b \Psi_{-\rho}(-(\nu + \sigma); -k, -x, T)]. \quad (2.10)$$

Démonstration. En suivant la même logique que nous avons utilisée pour calculer le prix de l'option d'achat correspondante, nous avons que,

$$\begin{aligned} P_\rho^-(S_0; T, K, b) &:= e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[e^{-\rho A_T^{S, -, b}} (K - S_T)^+ \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{W^{BSM}, -, 0}} \left(K - b e^{\sigma W^{BSM}} \right) \mathbb{I}_{(b e^{\sigma W^{BSM}} \leq K)} \right] \\ &\stackrel{\text{Girsanov}}{=} e^{-rT} \mathbb{E}_x \left[e^{\nu(B_T - x) - \frac{\nu^2}{2} T} e^{-\rho A_T^{B, -, 0}} (K - b e^{\sigma B_T}) \mathbb{I}_{(b e^{\sigma B_T} \leq K)} \right] \\ &= e^{-\gamma T - \nu x} \mathbb{E}_x \left[e^{\nu B_T - \rho A_T^{B, -, 0}} (K - b e^{\sigma B_T}) \mathbb{I}_{(B_T \leq k)} \right] \\ &= e^{-\gamma T - \nu x} [K \Xi_\rho(\nu; k, x, T) - b \Xi_\rho(\nu + \sigma; k, x, T)], \end{aligned} \quad (2.11)$$

où,

$$\Xi_\rho(\theta; k, x, T) = \mathbb{E}_x \left[e^{\theta B_T - \rho A_T^{B, -, 0}} \mathbb{I}_{(B_T \leq k)} \right]. \quad (2.12)$$

Si nous définissons B_t^* comme $-B_t$ et nous utilisons le fait que $A_T^{B, -, b} + A_T^{B, +, b} = T$ p.s. nous avons que,

$$\begin{aligned} \Xi_\rho(\nu; k, x, T) &= \mathbb{E}_{-x} \left[e^{-\nu B_T^* - \rho A_T^{B^*, +, 0}} \mathbb{I}_{(B_T^* \geq -k)} \right] \\ &= \mathbb{E}_{-x} \left[e^{-\nu B_T^* - \rho(T - A_T^{B^*, -, 0})} \mathbb{I}_{(B_T^* \geq -k)} \right] \\ &= e^{-\rho T} \Psi_{-\rho}(-\nu; -k, -x, T). \end{aligned} \quad (2.13)$$

En insérant (2.13) dans (2.11) la preuve est terminée. \square

Avec le théorème 2.1.2. et le fait que $A_T^{S, -, b} + A_T^{S, +, b} = T$ p.s. nous pouvons facilement déduire la formule pour le prix d'une option de vente escalier vers le haut.

Définition 2.1.4. Une option de vente escalier vers le haut est une option avec un paiement à l'échéance $T > 0$,

$$e^{-\rho A_T^{S,+b}} (K - S_T)^+.$$

Corollaire 2.1.1. (?) Le prix initial d'une option de vente escalier vers le haut, noté $P_\rho^+(S_0; T, K, b)$, est donné par l'équation suivante,

$$P_\rho^+(S_0; T, K, b) = e^{-\rho T} P_{-\rho}^-(S_0; T, K, b). \quad (2.14)$$

Démonstration.

$$P_\rho^+(S_0; T, K, b) := e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[e^{-\rho A_T^{S,+b}} (K - S_T)^+ \right],$$

et en utilisant l'égalité $A_T^{S,-b} + A_T^{S,+b} = T$ p.s. nous avons que,

$$\begin{aligned} e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[e^{-\rho A_T^{S,+b}} (K - S_T)^+ \right] &= e^{-\rho T} e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[e^{\rho A_T^{S,-b}} (K - S_T)^+ \right] \\ &\equiv e^{-\rho T} P_{-\rho}^-(S_0; T, K, b). \end{aligned}$$

Donc,

$$P_\rho^+(S_0; T, K, b) = e^{-\rho T} P_{-\rho}^-(S_0; T, K, b).$$

□

2.1.3 Réplication dynamique des options escalier

Un des avantages des options escalier est que la couverture de ces options est plus facile que dans le cas des options barrière. Ceci est dû au fait que les prix des options escalier sont lisses à la barrière et cela nous permet de prendre des dérivées partielles afin d'obtenir les deltas et gammas. Aux fins de ce mémoire tout ce que tu dois savoir sur la couverture, c'est que nous avons besoin de dérivées partielles du prix.

Le delta d'une option d'achat escalier exponentielle vers le bas

Puisque le prix initial d'une option escalier vers le bas est une fonction avec quatre régions, qui sont décrits dans le paragraphe suivant, notre delta aura également quatre régions. Dans cette section, nous allons présenter l'équation explicite du delta d'une option escalier vers le bas dans les régions i et ii .

- Région i : $S_0 \geq b, K \geq b$

Le delta est tout simplement la dérivée partielle de $C_\rho^-(S_0; T, K, b)$ par rapport à S_0 . Pour simplifier l'expression que nous obtiendrons, nous allons utiliser les trois identités suivantes :

$$\phi(d_1) = \phi(d_2) \frac{S_0 e^{rt}}{K}, \quad \phi(d_3) = \phi(d_4) \frac{b^2 e^{rt}}{S_0 K}, \quad \phi(d_5) = \phi(d_6) \frac{b^2 e^{rt}}{S_0 K}.$$

Le résultat que nous obtenons est,

$$\begin{aligned} \Delta_\rho^- = \frac{\partial C_\rho^-}{\partial S_0} = & \Phi(d_2) + \frac{1}{\sigma S_0} \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \left[(2\nu + \sigma) \left(\frac{b^2}{S_0} \right) \Phi(d_4) - 2\nu K e^{-rT} \Phi(d_3) \right] \\ & - \frac{1}{\sigma S_0} \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{-\gamma(T-t)}}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} \\ & \cdot \left(\left(\frac{b^2}{S_0} \right) [(2\mu + \sigma)(\nu + \sigma) \Phi(d_6) + \sigma t^{-\frac{1}{2}} \phi(d_6)] - 2\nu^2 e^{-rt} K \Phi(d_5) \right) dt \end{aligned}$$

Remarque. La partie en orange dans la formule précédente est le delta d'une option barrière vers le bas. Il est facile de voir que lorsque $\rho \rightarrow \infty$, Δ_ρ^- converge vers le delta d'une option barrière vers le bas. Cette propriété asymptotique nous permet d'approximer le delta d'une option barrière standard à n'importe quel degré de précision en augmentant ρ . De plus, avec une intégration longue mais simple, on peut démontrer que lorsque $\rho \rightarrow 0$, Δ_ρ^- converge vers le delta d'une option d'achat vanille.

- Région ii : $S_0 < b, K \geq b$

Pour trouver le delta dans la région *ii* nous devons prendre la dérivée partielle de $C_\rho^-(S_0 : T, K, b)$ par rapport au S_0 dans la région *ii*. Rappelons que x , C_1 , et C_2 sont des fonctions de S_0 . Le résultat que nous obtenons est le suivant,

$$\begin{aligned} \Delta_\rho^- = \frac{\partial C_\rho^-}{\partial S_0} = \frac{1}{\sigma S_0} \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{\nu}{\sigma}} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{-\gamma(T-t)}}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} \\ \cdot \left[\nu C_4 e^{-rt} K \Phi(d_7) - (\nu + \sigma) C_5 b \Phi(d_8) \right. \\ \left. - \sigma C_1 t^{-\frac{1}{2}} b \phi(d_8) \right] e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}} dt, \end{aligned}$$

où

$$C_4 = \left(\frac{x}{T-t} + \nu \right) (C_1 + 2) - \nu, \text{ et } C_5 = \left(\frac{x}{T-t} + \nu \right) (C_3 + 2) - \nu + \sigma.$$

Pour trouver le delta au temps $t \in (0, T]$ nous devons prendre la dérivée partielle de (2.9) par rapport à S_t et le résultat suit directement, c'est-à-dire,

$$\Delta_\rho^-(S_t; t, K, b) = e^{-\rho A_t^{S_t, b}} \Delta_\rho^-(S_t; T-t, K, b).$$

Voici une remarque sur la continuité du delta à la barrière.

Remarque. Si tu regardes la preuve du théorème 2.1.1, tu vois que par le théorème 1.1.2. nous avons que G_x est continue en x , ce qui implique que Δ_ρ^- est continue. Plus précisément, nous savons que,

$$G(z, x; T) := \int_0^\infty e^{-sT} \Lambda(z, x; T) dT.$$

Ce qui implique que,

$$G_x(z, x; T) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-sT} \Lambda(z, x; T) dT.$$

À partir des équations (A.16) et (A.18) nous avons que $\Lambda(z, x; T)$ est bornée en x et que $\Lambda_x(z, x; T)$ existe, donc nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée. Cela nous donne que,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-sT} \Lambda(z, x; T) dT = \int_0^\infty e^{-sT} \Lambda_x(z, x; T) dT,$$

Donc,

$$G_x(z, x; T) = \int_0^\infty e^{-sT} \Lambda_x(z, x; T) dT.$$

Maintenant si $G_x(z, x; T)$ est continue en x , alors,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-sT} \Lambda_x(z, x; T) dT = \lim_{x \rightarrow 0^-} \int_0^\infty e^{-sT} \Lambda_x(z, x; T) dT = \int_0^\infty e^{-sT} \Lambda_x(z, 0; T) dT.$$

À partir des équations (A.16) et (A.18) nous avons que $\Lambda_x(z, x; T)$ est bornée, donc avec le théorème de convergence dominée nous avons que,

$$\int_0^\infty e^{-sT} \lim_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_x(z, x; T) dT = \int_0^\infty e^{-sT} \lim_{x \rightarrow 0^-} \Lambda_x(z, x; T) dT = \int_0^\infty e^{-sT} \Lambda_x(z, 0; T) dT.$$

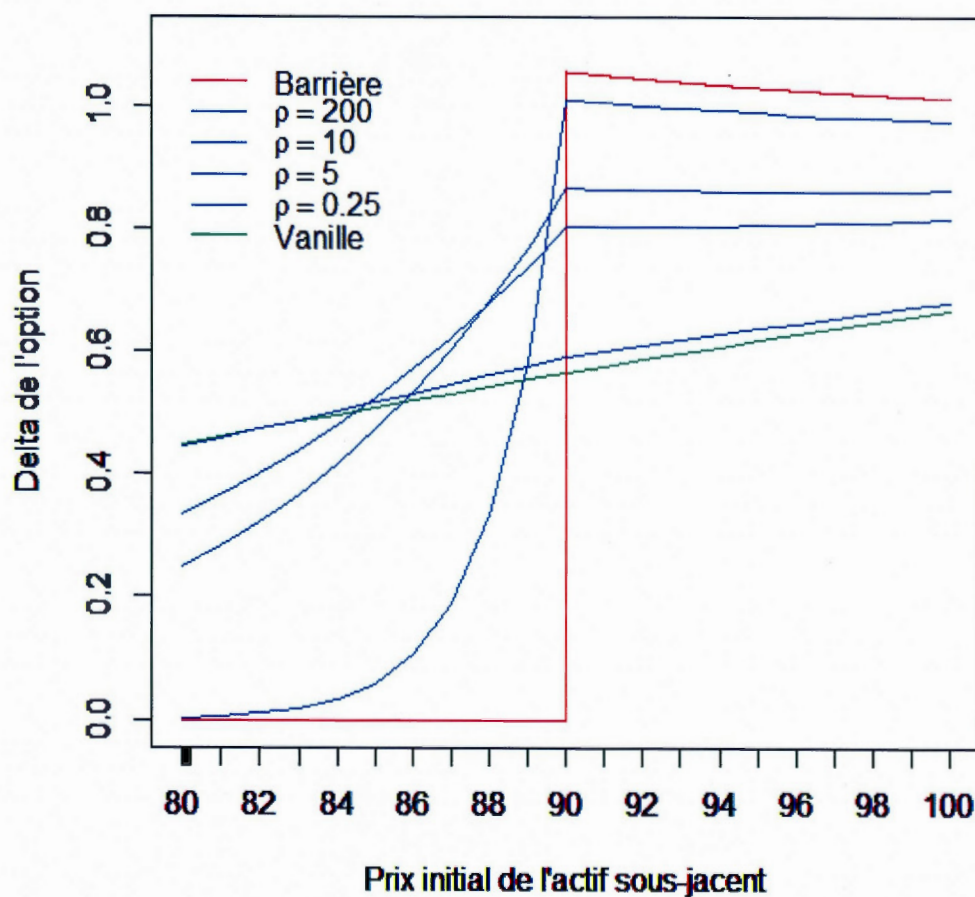
Par l'unicité de la transformée de Laplace nous avons que,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Lambda_x(z, x; T) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \Lambda_x(z, x; T) = \Lambda_x(z, 0; T).$$

Donc, $\Lambda_x(z, x; T)$ est continue en x et cela implique que $\Delta_\rho^- = \frac{\partial C_\rho^-}{\partial S_0}$ est continue à la barrière car $x = 0$ implique que $S_0 = b$, voir (2.2).

Remarque. (concernant la figure 2.3) Nous pouvons voir que, contrairement à l'option barrière, l'option escalier a un delta qui est continu à la barrière. Cela facilitera la couverture de ces options lorsque le prix du sous-jacent se rapproche de la barrière. De plus, tout comme avec les prix de ces options, si nous augmentons ρ , le delta de l'option escalier converge vers le delta de l'option barrière. Aussi, quand ρ tend vers zéro le delta de l'option escalier converge vers le delta de l'option vanille. Cela nous permet d'approcher le delta des options barrière à la barrière en trouvant d'abord le delta de l'option escalier à la barrière, puis en augmentant ρ jusqu'à la précision voulue.

Figure 2.3 Le delta initial d'une option vanille, escalier vers le bas, et barrière vers le bas contre le prix initial de l'actif sous-jacent pour différentes valeurs de ρ ($K = 95$, $b = 90$, $T = 1$, $r = 0.04$, $\sigma = 0.4$)



Le gamma d'une option d'achat escalier exponentielle vers le bas

Pour trouver le gamma nous devons prendre la dérivée partielle de $C_\rho^-(S_0; T, K, b)$ deux fois par rapport au S_0 . Même si le delta est continu à la barrière il a un pic à la barrière. Cela implique que le gamma va avoir un saut fini à la barrière. La grandeur de ce saut est proportionnelle à ρ , c'est-à-dire,

$$\lim_{S_0 \rightarrow b^+} \Gamma_\rho^-(S_0; T, K, b) - \lim_{S_0 \rightarrow b^-} \Gamma_\rho^-(S_0; T, K, b) = \frac{2\rho}{\sigma^2 b^2} C_\rho^-(b; T, K, b)$$

Pour plus d'information voir Linetsky (1999) p.73 et p.92-93.

Remarque. Quand $\rho \rightarrow \infty$ la grandeur de ce saut à la barrière tend vers ∞ , comme le gamma d'une option barrière "knock-out" à la barrière; et quand $\rho \rightarrow 0$ le gamma devient continu à la barrière, comme une option d'achat vanille.

2.2 Les options parisiennes cumulatives

Les options parisiennes cumulatives sont des options vanilles où le paiement à l'échéance est multiplié par $\mathbb{I}_{(A_T^{S, \pm, b} \leq \beta T)}$, $\beta \in (0, 1)$. Autrement dit, cette option vanille est annulée si le prix de l'actif sous-jacent reste au-dessus ou en dessous d'une barrière prédéterminée pendant trop longtemps. Dans cette section, nous allons calculer le prix d'une option d'achat parisienne cumulative vers le bas. Linetsky (1999) a montré que cela peut être fait facilement en appliquant les résultats de la section précédente.

Définition 2.2.1. Une option d'achat parisienne cumulative vers le bas est une option avec paiement à l'échéance, $T > 0$,

$$\mathbb{I}_{(A_T^{S, -, b} \leq \beta T)} (S_T - K)^+,$$

où $\beta \in (0, 1)$.

Avant que nous trouvions le prix de cette option, nous allons tout d'abord introduire un résultat.

Proposition 2.2.1. (?) Soit $C_\beta(S_0; T, K, b)$ le prix d'une option d'achat parisienne cumulative vers le bas. Le prix de cette option peut être représenté de la manière suivante,

$$C_\beta(S_0; T, K, b) = \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \{C_\rho^-(S_0; T, K, b)\} dt,$$

où $\beta \in (0, 1)$.

Démonstration. En partant du côté gauche nous avons que, pour $\beta \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} C_\beta(S_0; T, K, b) &= e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[\mathbb{I}_{(A_T^{S, -, b} \leq \beta T)} (S_T - K)^+ \right] \\ &= \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} (s - K)^+ \mathbb{P} \left(S_T \in ds, A_T^{S, -, b} \in dt \right). \end{aligned}$$

Pour le moment, afin de simplifier la notation, nous allons définir

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} (s - K)^+ \mathbb{P} \left(S_T \in ds, A_T^{S, -, b} \in dt \right)$ comme $f(t)dt$. Avec cette définition nous avons que,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} (s - K)^+ \mathbb{P} \left(S_T \in ds, A_T^{S, -, b} \in dt \right) \\ &= \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} f(t) dt \\ &= \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \{ \mathcal{L}_{t \rightarrow \rho} \{ f(t) \} \} dt \\ &= \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \int_0^T e^{-\rho t} f(t) dt \right\} dt \\ &= \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \int_0^T e^{-\rho t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} (s - K)^+ \mathbb{P} \left(S_T \in ds, A_T^{S, -, b} \in dt \right) \right\} \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T e^{-\rho t} (s - K)^+ \mathbb{P} \left(A_T^{S, -, b} \in dt, S_T \in ds \right) \right\} \\ &= \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[e^{-\rho A_T^{S, -, b}} (S_T - K)^+ \right] \right\} \\ &= \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \{ C_\rho^-(S_0; T, K, b) \}, \end{aligned}$$

donc,

$$C_\beta(S_0; T, K, b) = \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \{C_\rho^-(S_0; T, K, b)\} dt.$$

□

2.2.1 Le prix d'une option d'achat parisienne cumulative vers le bas

En utilisant la proposition précédente et le théorème 2.1.1, nous pouvons facilement calculer le prix d'une option d'achat parisienne cumulative vers le bas. De la proposition précédente, nous pouvons voir que le prix d'une option parisienne cumulative est une fonction du prix d'une option escalier. Par conséquent, nous allons une fois de plus avoir quatre régions différentes.

- Région i : $S_0 \geq b, K \geq b$

$$\begin{aligned} C_\beta(S_0; T, K, b) &= \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \{C_\rho^-(S_0; T, K, b)\} dt \\ &= \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ S_0 \Phi(d_2) - K e^{-rT} \Phi(d_1) \right. \\ &\quad - \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \left[\left(\frac{b^2}{S_0} \right) \Phi(d_4) - K e^{-rT} \Phi(d_3) \right] \\ &\quad + \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-u)}) e^{-\gamma(T-u)}}{\rho \sqrt{2\pi(T-u)^3}} \\ &\quad \cdot \left[(\nu + \sigma) \left(\frac{b^2}{S_0} \right) \Phi(d_6) - \nu e^{-rT} K \Phi(d_5) \right] du \left. \right\} dt \\ &= \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \left\{ S_0 \Phi(d_2) - K e^{-rT} \Phi(d_1) \right. \\ &\quad - \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \left[\left(\frac{b^2}{S_0} \right) \Phi(d_4) - K e^{-rT} \Phi(d_3) \right] \left. \right\} \\ &\quad \cdot \delta_t(0) dt \\ &\quad + \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-u)}) e^{-\gamma(T-u)}}{\rho \sqrt{2\pi(T-u)^3}} \right. \end{aligned}$$

$$\cdot \left[(\nu + \sigma) \left(\frac{b^2}{S_0} \right) \Phi(d_6) - \nu e^{-rT} K \Phi(d_5) \right] du \Bigg\} dt.$$

Avec l'identité,

$$\mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho} \int_0^T (1 - e^{-\rho(T-u)}) h(u) du \right\} = \int_0^{T-t} h(u) du,$$

qui sera bien expliquée dans la section 2.3, nous avons que,

$$\begin{aligned} C_\beta(S_0; T, K, b) &= \mathbb{I}_{(0 \leq \beta T)} \left\{ S_0 \Phi(d_2) - K e^{-rT} \Phi(d_1) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \left[\left(\frac{b^2}{S_0} \right) \Phi(d_4) - K e^{-rT} \Phi(d_3) \right] \right\} \\ &\quad + \int_0^T f(t) \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \int_0^{T-t} \frac{e^{-\gamma(T-u)}}{\sqrt{2\pi(T-u)^3}} \\ &\quad \cdot \left[(\nu + \sigma) \left(\frac{b^2}{S_0} \right) \Phi(d_6) - \nu e^{-rT} K \Phi(d_5) \right] du dt \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} 1 \cdot \left\{ S_0 \Phi(d_2) - K e^{-rT} \Phi(d_1) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \left[\left(\frac{b^2}{S_0} \right) \Phi(d_4) - K e^{-rT} \Phi(d_3) \right] \right\} \\ &\quad + \int_0^T \int_0^{T-u} \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} dt \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \frac{e^{-\gamma(T-u)}}{\sqrt{2\pi(T-u)^3}} \\ &\quad \cdot \left[(\nu + \sigma) \left(\frac{b^2}{S_0} \right) \Phi(d_6) - \nu e^{-rT} K \Phi(d_5) \right] du. \end{aligned}$$

• Région *ii* : $S_0 \leq b, K \geq b$

En suivant la même logique que dans la région *i* nous avons que,

$$\begin{aligned} C_f(S_0; T, K, b) &= \int_0^T \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \{ C_\rho^-(S_0; T, K, b) \} dt \\ &= \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{\nu}{\sigma}} \int_0^T \int_0^{T-u} \mathbb{I}_{(t \leq \beta T)} dt \frac{e^{-\gamma(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}} \\ &\quad \cdot \left[(\nu + \sigma) C_3 b \Phi(d_8) - \nu C_1 e^{-rT} K \Phi(d_7) \right. \\ &\quad \left. - \sigma x t^{-\frac{1}{2}} b \phi(d_8) \right] e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}} du. \end{aligned}$$

Le prix dans les régions *iii* : $S_0 \geq b$ et $K \leq b$, et *iv* : $S_0 \leq b$ et $K \leq b$, peut être calculé de la même manière.

2.3 La loi conjointe de $(B_T^x, A_T^{B^x, -, 0})$

Cette loi a été dérivée avec $x = 0$ dans Billingsley (1968) et beaucoup d'autres endroits. Pour $x \in \mathbb{R}$, la loi est plus difficile à dériver mais Linetsky a montré que la loi de $(B_T^x, A_T^{B^x, -, 0})$ suit facilement des résultats de la section 2.1 en utilisant les méthodes de Feynman-Kac. Rappelons la notation,

$$\Lambda_\rho(z, x; T) = \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B^x, -, 0}} \delta_{B_T}(z) \right] = \int_0^T e^{-\rho t} \mathbb{P}_x(A_T^{B^x, -, 0} \in dt, B_T \in dz). \quad (2.15)$$

En observant l'équation (2.15), nous pouvons voir que, pour trouver la loi conjointe de $(B_T^x, A_T^{B^x, -, 0})$, nous devons trouver la transformée de Laplace inverse de $\Lambda_\rho(z, x; T)$ par rapport à ρ , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(A_T^{B^x, -, 0} \in dt, B_T \in dz) &= \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \{ \Lambda_\rho(z, x; T) \} dz dt \\ &=: q_x(z, t; T) dz dt. \end{aligned}$$

Nous allons commencer avec le cas où $t \in (0, T)$.

- Région *i* : $x \geq 0, z \geq 0, z + x > 0$

$$\begin{aligned} q_x^i(z, t; T) &:= \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \{ \Lambda_\rho^i(z, x; T) \} \\ &\stackrel{(B.16)}{=} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left(e^{-\frac{(x-z)^2}{2T}} - e^{-\frac{(x+z)^2}{2T}} \right) + \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})(z+x)}{2\rho\pi\sqrt{(T-t)^3 t^3}} e^{-\frac{(x+z)^2}{2t}} dt \right\} \\ &= \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left(e^{-\frac{(x-z)^2}{2T}} - e^{-\frac{(x+z)^2}{2T}} \right) \right\} \\ &\quad + \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho} \int_0^T \frac{(z+x)}{2\pi\sqrt{(T-t)^3 t^3}} e^{-\frac{(x+z)^2}{2t}} dt \right\} \\ &\quad - \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho} \int_0^T \frac{e^{-\rho(T-t)}(z+x)}{2\pi\sqrt{(T-t)^3 t^3}} e^{-\frac{(x+z)^2}{2t}} dt \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left(e^{\frac{-(x-z)^2}{2T}} - e^{\frac{-(x+z)^2}{2T}} \right) \delta_t(0) + \int_0^T \frac{(z+x)e^{\frac{-(x+z)^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{(T-t)^3 t^3}} dt \\
&\quad - \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho} \int_0^T e^{-\rho(T-t)} \frac{(z+x)e^{\frac{-(x+z)^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{(T-t)^3 t^3}} dt \right\}
\end{aligned}$$

Pour le moment, nous allons nous concentrer sur la partie orange de l'équation.

Avec le changement de variable $u = T - t$ nous avons que,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho} \int_0^T e^{-\rho(T-t)} \frac{(z+x)e^{\frac{-(x+z)^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{(T-t)^3 t^3}} dt \right\} \\
&= \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho} \int_0^T e^{-\rho u} \frac{(z+x)e^{\frac{-(x+z)^2}{2(T-u)}}}{2\pi\sqrt{t^3 (T-u)^3}} du \right\} \\
&:= \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho} \mathcal{L}_{u \rightarrow \rho} \left\{ \frac{(z+x)e^{\frac{-(x+z)^2}{2(T-u)}}}{2\pi\sqrt{t^3 (T-u)^3}} \right\} \right\} \\
&\stackrel{(B.15)}{=} \int_0^t \frac{(z+x)e^{\frac{-(x+z)^2}{2(T-u)}}}{2\pi\sqrt{t^3 (T-u)^3}} du \\
&\stackrel{(v=T-u)}{=} \int_{T-t}^T \frac{(z+x)e^{\frac{-(x+z)^2}{2v}}}{2\pi\sqrt{(T-v)^3 v^3}} dv.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
q_x^i(z, t; T) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left(e^{\frac{-(x-z)^2}{2T}} - e^{\frac{-(x+z)^2}{2T}} \right) \delta_t(0) + \int_0^{T-t} \frac{e^{\frac{-(x+z)^2}{2u}} (z+x)}{2\pi\sqrt{(T-u)^3 u^3}} du \\
&= \int_0^{T-t} \frac{e^{\frac{-(x+z)^2}{2u}} (z+x)}{2\pi\sqrt{(T-u)^3 u^3}} du,
\end{aligned}$$

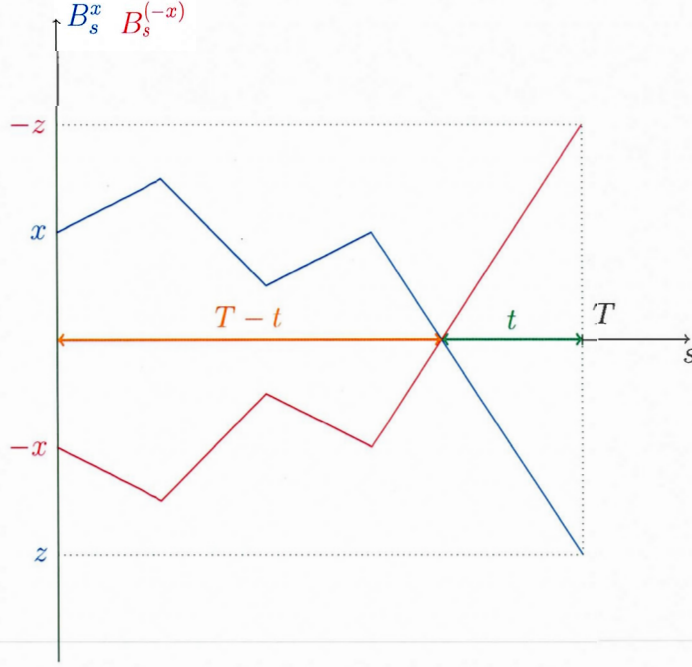
car si $t \in (0, T)$, alors $\delta_t(0) = 0$.

• Région ii : $x \leq 0, z > 0$

$$q_x^{ii}(z, t; T) := \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \{ \Lambda_\rho^{ii}(z, x; T) \}$$

$$\stackrel{(B.20)}{=} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) \left[z \left(1 - \frac{x^2}{T-t} \right) + x \left(1 - \frac{z^2}{t} \right) \right]}{2\pi\rho\sqrt{(T-t)^3 t^3}} e^{-\frac{x^2}{2(T-t)} - \frac{z^2}{2t}} dt \right\}.$$

Figure 2.4 $\mathbb{P}_x \left(A_T^{B, -, 0} \in dt, B_T \in dz \right) = \mathbb{P}_{-x} \left(A_T^{B, -, 0} \in d(T-t), B_T \in d(-z) \right)$,
où $x > 0$ et $z < 0$



En suivant la même logique que dans la région *i*, nous avons que, pour $t \in (0, T)$,

$$q_x^{ii}(z, t; T) = \int_0^{T-t} \frac{\left[z \left(1 - \frac{x^2}{T-t} \right) + x \left(1 - \frac{z^2}{u} \right) \right]}{2\pi\rho\sqrt{(T-u)^3 t^3}} e^{-\frac{x^2}{2(T-u)} - \frac{z^2}{2u}} du.$$

- Région *iii* : $x \geq 0, z < 0$

En utilisant la symétrie du mouvement brownien (voir la figure 2.1) nous avons que,

$$q_x^{iii}(z, t; T) = q_{-x}^{ii}(-z, T-t; T)$$

- Région *iv* : $x \leq 0, z \leq 0, x+z < 0$

En utilisant la symétrie du mouvement brownien, de manière similaire au cas de la région *iii*, nous avons que,

$$q_x^{iv}(z, t; T) = q_{-x}^{ii}(-z, T-t; T).$$

Finalement, pour $x = z = 0$ et $t \in (0, T)$ nous avons que,

$$\begin{aligned} q_0(0, t; T) &:= \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \{ \Lambda_\rho(0, 0; T) \} \\ &\stackrel{(B.23)}{=} \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho \sqrt{2\pi T^3}} \right\} = \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho \sqrt{2\pi T^3}} \right\} - \mathcal{L}_{\rho \rightarrow t}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\rho T}}{\rho \sqrt{2\pi T^3}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T^3}} - \frac{H(t - T)}{\sqrt{2\pi T^3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T^3}}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant faire les cas où $t = 0$ ou $t = T$.

- $t = 0, x > 0, z > 0$

Avec la remarque B.1.1. nous avons directement que,

$$\mathbb{P}_x \left(A_T^{B, -, 0} = 0, B_T \in d(z) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left(e^{-\frac{(x-z)^2}{2T}} - e^{-\frac{(x+z)^2}{2T}} \right).$$

- $t = T, x < 0, z < 0$

En utilisant la symétrie du mouvement brownien nous avons que,

$$\mathbb{P}_x \left(A_T^{B, -, 0} = T, B_T \in d(z) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left(e^{-\frac{(x-z)^2}{2T}} - e^{-\frac{(x+z)^2}{2T}} \right).$$

La forme fermée de la fonction de densité mentionnée ci-dessus est présentée dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.1. (?) *La forme fermée de la fonction de densité conjointe de $A_T^{B, +, 0}$ et B_T est, pour $t \in (0, T)$,*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left(A_T^{B, -, 0} \in dt, B_T \in dz \right) \\ &= \frac{z}{\pi T^2} \sqrt{\frac{t}{T-t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2T}} \frac{T-x^2}{T^{\frac{5}{2}}} \Phi \left(\frac{z}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{t}{T-t}} \right) dt dz, \end{aligned}$$

pour $z < 0$, et,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left(A_T^{B, -, 0} \in dt, B_T \in dz \right) \\ &= \frac{z}{\pi T^2} \sqrt{\frac{T-t}{t}} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2T}} \frac{T-z^2}{T^{\frac{5}{2}}} \Phi \left(\frac{-z}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{T-t}{t}} \right) dt dx \end{aligned}$$

pour $z > 0$.

2.4 Le prix d'une option avec paiement général $g(S_T, A_T^{S,-,b})$

Pour cette section, nous supposons que g est une fonction assez régulière. Un exemple de g , que nous n'avons pas traité dans ce mémoire, est l'option escalier simple, où $g(s, t) = \max(1 - \rho t, 0)(s - K)^+$.

Proposition 2.4.1. (?) Soit $\Theta_g(S_0; T, b)$ le prix initial d'une option avec paiement $g(S_T, A_T^{S,-,b})$ à l'échéance $T > 0$. La fonction $\Theta_g(S_0; T, b)$ est donnée par :

- Région i $\{S_0 \geq b\}$

$$\begin{aligned} \Theta_g(S_0; T, b) = e^{-\gamma T - \nu x} & \left\{ \int_0^\infty g(be^{\sigma z}, 0) e^{\nu z} \mathbb{P}_x \left(A_T^{B,-,0} = 0, B_T \in dz \right) \right. \\ & + \int_0^T \int_0^\infty g(be^{\sigma z}, t) e^{\nu z} q_x^i(z, t; T) dz dt \\ & \left. + \int_0^T \int_0^\infty g(be^{\sigma z}, t) e^{\nu z} q_x^{iii}(z, t; T) dz dt \right\}. \end{aligned}$$

- Région ii $\{S_0 \leq b\}$

$$\begin{aligned} \Theta_g(S_0; T, b) = e^{-\gamma T - \nu x} & \left\{ \int_{-\infty}^0 g(be^{\sigma z}, T) e^{\nu z} \mathbb{P}_x \left(A_T^{B,-,0} = T, B_T \in dz \right) \right. \\ & + \int_0^T \int_0^\infty g(be^{\sigma z}, t) e^{\nu z} q_x^{ii}(z, t; T) dz dt \\ & \left. + \int_0^T \int_0^\infty g(be^{\sigma z}, t) e^{\nu z} q_x^{iv}(z, t; T) dz dt \right\}. \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Theta_g(S_0; T, b) &= e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[g \left(S_T, A_T^{S,-,b} \right) \right] \\ &\stackrel{\text{Girsanov}}{=} e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[e^{\nu(B_T - x) - \frac{\nu^2 T}{2}} g \left(be^{\sigma B_T}, A_T^{B,-,0} \right) \right] \\ &= e^{-\gamma T - \nu x} \mathbb{E}_x \left[e^{\nu B_T} g \left(be^{\sigma B_T}, A_T^{B,-,0} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

et le résultat souhaité découle directement de (2.16). \square

2.5 Les options corridor

Dans cette section, nous allons examiner brièvement les options corridor de Fusai. Ces options paient un montant à l'échéance qui dépend de la quantité de temps que le prix de l'actif sous-jacent reste dans un certain intervalle. Ces options sont un bon investissement pour les investisseurs qui cherchent à miser sur la stabilité globale du marché. Quel que soit le prix initial de l'actif sous-jacent, ces options seront profitables tant que le prix de l'actif sous-jacent ne bouge pas trop loin de sa valeur initiale. Nous allons décrire la procédure pour dériver le prix de ces types d'options, mais nous n'allons pas calculer les prix. La raison pour ceci est que le calcul du prix de ce type d'options nécessite l'inversion numérique de la transformée de Laplace, un sujet qui déborde le cadre de ce mémoire. Pour plus d'informations sur l'inversion numérique des transformées de Laplace et plus encore, il suffit de consulter l'excellente thèse de doctorat, [?]. Il existe deux types d'options corridor qui sont moins générales, les options à un swap et à deux swaps, où nous pouvons trouver une solution fermée pour le prix. Ces prix ont été dérivés dans [?] et nous présenterons les résultats dans la section 2.5.1.

Rappel. Le temps d'occupation d'un intervalle (l, u) pour W est défini par,

$$A_t^{W,l,u} := \int_0^t \mathbb{I}_{(l < W_s < u)} ds,$$

où $l, u \in \mathbb{R}$, $l < u$ et $t \geq 0$.

Définition 2.5.1. Soit $S = (S_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien géométrique avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $S_0, \sigma > 0$. Une option corridor est une option avec un paiement à l'échéance $T > 0$,

$$\left(\lambda A_T^{S,l,u} - K \right)^+,$$

où $\lambda > 0$ et $0 < K \leq \lambda T$.

Le prix initial de cette option est donné par,

$$\begin{aligned} e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\lambda A_T^{S,l,u} - K \right)^+ \right] &:= e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\lambda \int_0^T \mathbb{I}_{(l < S_t < u)} dt - K \right)^+ \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\lambda \int_0^T \mathbb{I}_{(L < W_t^{BSM} < U)} dt - K \right)^+ \right], \end{aligned}$$

où $W_t^{BSM} := B_t + \nu t$, $\nu := \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$, $L := \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{l}{S_0} \right)$, et $U := \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{u}{S_0} \right)$,

et le prix initial de cette option en termes de la densité de $A_T^{W,L,U}$ est,

$$e^{-rT} \left(\int_{\frac{K}{\lambda}}^{T-} (\lambda t - K) \mathbb{P} \left(A_T^{W,L,U} \in dt \right) + (\lambda T - K) \mathbb{P} \left(A_T^{W,L,U} = T \right) \right).$$

Remarque. Nous avons un point de masse à $t = T$ car il est possible que le processus W reste dans l'intervalle (L, U) pour toute la trajectoire.

Remarque. Nous pouvons facilement généraliser cette option à une option où les barrières augmentent de façon exponentielle à un taux γ ; c'est-à-dire, au lieu de $\mathbb{I}_{(l < S_t < u)}$ nous aurons,

$$\mathbb{I}_{(le^{\gamma t} < S_t < ue^{\gamma t})} = \mathbb{I}_{\left(\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{l}{S_0} \right) < B_t + \frac{1}{\sigma} \left(r - \gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) t < \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{u}{S_0} \right) \right)} = \mathbb{I}_{(L < B_t + \nu_\gamma t < U)},$$

où $\nu_\gamma := \frac{1}{\sigma} \left(r - \gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right)$.

Remarque. Si le prix d'exercice est égal à zéro ($K = 0$), nous avons ce qui est appelé une obligation corridor. Le prix d'une obligation corridor au début du contrat est donné par,

$$\begin{aligned} e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[A_T^{S,l,u} \right] &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[\int_0^T \mathbb{I}_{(L < W_t < U)} dt \right] \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^T \mathbb{P} (L < W_t < U) dt \\ &= \int_0^T \mathbb{P} \left(\frac{L - \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sqrt{t}} < Z < \frac{U - \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sqrt{t}} \right) dt \\ &= \int_0^T \Phi \left(\frac{L - \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sqrt{t}} \right) - \Phi \left(\frac{U - \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sqrt{t}} \right) dt \end{aligned}$$

où Z suit une loi normale $(0, 1)$.

Remarque. Pour généraliser une option corridor, nous pouvons ajouter un autre corridor. Une option à double corridor est une option avec un paiement à l'échéance $T > 0$,

$$\left(\lambda_1 A_T^{S,l,u} - \lambda_2 \left(T - A_T^{S,l,u} \right) - C \right)^+,$$

où $C \geq 0$ est le prix d'exercice, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $l, u \in \mathbb{R}$, et $l < u$. En mots, cette option paie λ_1 pour le temps que l'actif sous-jacent est dans le couloir (l, u) et coûte λ_2 pour le temps que l'actif sous-jacent est en dehors du couloir, moins un certain prix d'exercice, C . Évidemment le paiement minimum est 0.

Comme nous l'avons dit précédemment, le calcul du prix des options corridor est principalement un problème de méthodes numériques et ne sera pas fait ici. Toutefois en utilisant la représentation explicite de Pechtl de la fonction de répartition du temps d'occupation d'un mouvement brownien arithmétique (voir section 1.2.1) nous pouvons trouver le prix de deux versions d'options corridor moins générales : les options à un swap et à deux swaps. Cela sera fait dans la prochaine section.

2.5.1 Les options à un swap et à deux swaps

Dans cette section, nous allons présenter la dérivation de Pechtl des prix des options à un swap et à deux swaps.

Les options à deux swap

Définition 2.5.2. Une option à deux swaps est une option avec paiement à l'échéance, $T > 0$,

$$g(\lambda_1, \lambda_2, T, K; S) := \left(\lambda_1 A_T^{S,+,K} - \lambda_2 A_T^{S,-,K} \right)^+,$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $K > 0$.

Remarque. Une options à deux swaps est une option à double corridor avec $C = 0$ et $u \rightarrow \infty$.

Avant de trouver le prix de cette option, notons que nous pouvons réécrire ce paiement de la manière suivante,

$$\begin{aligned}
 g(\lambda_1, \lambda_2, T, K; S) &\equiv \left(\lambda_1 A_T^{S,+,K} - \lambda_2 A_T^{S,-,K} \right)^+ \\
 &= \left(\lambda_1 A_T^{S,+,K} - \lambda_2 A_T^{S,-,K} + \lambda_2 T - \lambda_2 T \right)^+ \\
 &= \left(\lambda_1 A_T^{S,+,K} + \lambda_2 (T - A_T^{S,-,K}) - \lambda_2 T \right)^+ \\
 &= \left(\lambda_1 A_T^{S,+,K} + \lambda_2 A_T^{S,+,K} - \lambda_2 T \right)^+ \\
 &= \left((\lambda_1 + \lambda_2) A_T^{S,+,K} - \lambda_2 T \right)^+.
 \end{aligned}$$

Ceci implique que si $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_2 \geq 0$ alors $g(\lambda_1, \lambda_2, T, K; S) = 0$ et si $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors $g(\lambda_1, \lambda_2, T, K; S) = -\lambda_2 T$. Pour ne pas avoir à faire face à ces situations triviales, nous supposons $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

Si $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ alors,

$$\begin{aligned}
 g(\lambda_1, \lambda_2, T, K; S) &= \left((\lambda_1 + \lambda_2) A_T^{S,+,K} - \lambda_2 T \right)^+ \\
 &= \left((\lambda_1 + \lambda_2) \left(A_T^{S,+,K} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} T \right) \right)^+ \\
 &= (\lambda_1 + \lambda_2) \left(A_T^{S,+,K} - T_\lambda \right) \mathbb{I}_{(A_T^{S,+,K} > T_\lambda)},
 \end{aligned}$$

où $T_\lambda := \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} T$.

Si $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ alors,

$$\begin{aligned}
 g(\lambda_1, \lambda_2, T, K; S) &= \left((\lambda_1 + \lambda_2) A_T^{S,+,K} - \lambda_2 T \right)^+ \\
 &= \left((\lambda_1 + \lambda_2) \left(A_T^{S,+,K} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} T \right) \right)^+ \\
 &= (\lambda_1 + \lambda_2) \left(A_T^{S,+,K} - T_\lambda \right) \mathbb{I}_{(A_T^{S,+,K} \leq T_\lambda)},
 \end{aligned}$$

où $T_\lambda := \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} T$.

Avant que nous trouvions le prix de cette option, nous allons définir $W^{BSM} = (W_t^{BSM})_{t \geq 0}$ comme un mouvement brownien avec dérive $\nu = \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$ et $X^{BSM} = (X_t^{BSM})_{t \geq 0}$ comme un mouvement brownien avec dérive $(-\nu)$.

Rappel 2.5.1. De la section 1.2.1., nous avons que, pour $k \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P} \left(A_T^{W,+,k} \leq t \right) = F_A^+(t; T, k, W).$$

Afin de simplifier la notation nous allons définir $F_A^+(t)$ comme $F_A^+(t; T, k, W)$.

Maintenant, le prix d'une option à deux swaps, notée $\pi(\lambda_1, \lambda_2, T, K; S)$, est donnée par :

• Pour $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$,

$$\begin{aligned}
& \pi(\lambda_1, \lambda_2, T, K; S) \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}_{S_0} \left[(\lambda_1 + \lambda_2) \left(A_T^{S,+,K} - T_\lambda \right) \mathbb{I}_{(A_T^{S,+,K} > T_\lambda)} \right] \\
&= e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbb{E} \left[\left(A_T^{W^{BSM},+, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right)} - T_\lambda \right) \mathbb{I}_{\left(A_T^{W^{BSM},+, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right)} > T_\lambda \right)} \right] \\
&= e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_{T_\lambda}^T (t - T_\lambda) dF_A^+(t) \\
&= e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_{T_\lambda}^T \int_{T_\lambda}^t ds dF_A^+(t) \\
&= e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_{T_\lambda}^T \int_s^T dF_A^+(t) ds \\
&= e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_{T_\lambda}^T F_A^+(T) - F_A^+(s) ds \\
&= e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_{T_\lambda}^T (1 - F_A^+(s)) ds \\
&= e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_{T_\lambda}^T \left(1 - F_A^+ \left(s; T, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right), W^{BSM} \right) \right) ds \mathbb{I}_{(K \leq S_0)} \\
&\quad + e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_{T_\lambda}^T F_A^+ \left(T - s; T, -\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right), X^{BSM} \right) ds \mathbb{I}_{(K > S_0)} \\
&= e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_{T_\lambda}^T \left(1 - F_A^+ \left(s; T, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right), W^{BSM} \right) \right) ds \mathbb{I}_{(K \leq S_0)} \\
&\quad + e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^{T-T_\lambda} F_A^+ \left(u; T, -\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right), X^{BSM} \right) du \mathbb{I}_{(K > S_0)}
\end{aligned}$$

Remarque. La forme fermée de l'intégrale,

$$\int_{-\infty}^{\theta} F_A^+(t; T, k, W) dt,$$

pour $k < 0$ a été dérivé dans ? à la page 67.

- Pour $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$,

$$\begin{aligned}
& \pi(\lambda_1, \lambda_2, T, K; S) \\
&= e^{-rT} \mathbb{E} \left[(\lambda_1 + \lambda_2) \left(A_T^{S,+,K} - T_\lambda \right) \mathbb{I}_{(A_T^{S,+,K} \leq T_\lambda)} \right] \\
&= e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbb{E} \left[\left(A_T^{WBSM,+, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right)} - T_\lambda \right) \mathbb{I}_{\left(A_T^{WBSM,+, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right)} \leq T_\lambda \right)} \right] \\
&= e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^{T_\lambda} (t - T_\lambda) dF_A^+(t) \\
&= -e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^{T_\lambda} \int_t^{T_\lambda} ds dF_A^+(t) \\
&= -e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^{T_\lambda} \int_0^s dF_A^+(t) ds \\
&= -e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^{T_\lambda} F_A^+(s) ds \\
&= -e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^{T_\lambda} F_A^+ \left(s; T, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right), W^{BSM} \right) \mathbb{I}_{(K \leq S_0)} ds \\
&\quad - e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^{T_\lambda} \left(1 - F_A^+ \left(T - s; T, -\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right), X^{BSM} \right) \right) \mathbb{I}_{(K > S_0)} ds \\
&= -e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^{T_\lambda} F_A^+ \left(s; T, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right), W^{BSM} \right) \mathbb{I}_{(K \leq S_0)} ds \\
&\quad - e^{-rT} (\lambda_1 + \lambda_2) \int_{T-T_\lambda}^T \left(1 - F_A^+ \left(u; T, -\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right), X^{BSM} \right) \right) \mathbb{I}_{(K > S_0)} du
\end{aligned}$$

Les options à un swap

Avec les résultats de la section précédente nous pouvons facilement trouver le prix d'une option à un swap.

Définition 2.5.3. Une option à un swap est une option avec paiement à l'échéance $T > 0$,

$$g(\lambda, T, K; S) := \left(\lambda A_T^{S,+,K} \right)^+,$$

où $\lambda, K > 0$.

En appliquant les résultats de la section précédente nous avons que le prix d'une option à un swap, noté $\pi(\lambda, T, K; S)$, est donné par $\pi(\lambda, 0, T, K; S)$; c'est-à-dire :

- Pour $K \leq S_0$,

$$\begin{aligned}\pi(\lambda, T, K; S) &= \pi(\lambda, 0, T, K; S) \\ &= e^{-rT} \lambda \int_0^T \left(1 - F_A^+ \left(s, T, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right); W^{BSM} \right) \right) ds.\end{aligned}$$

- Pour $K \geq S_0$,

$$\begin{aligned}\pi(\lambda, T, K; S) &= \pi(\lambda, 0, T, K; S) \\ &= e^{-rT} \lambda \int_0^T F_A^+ \left(u, T, -\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right); X^{BSM} \right) du.\end{aligned}$$

CHAPITRE III

LES α -QUANTILES POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN ARITHMÉTIQUE

Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion d' α -quantile pour le mouvement brownien. Un α -quantile pour un mouvement brownien peut être considéré intuitivement comme la valeur telle que le mouvement brownien passe $\alpha 100\%$ du temps en dessous de cette valeur. La motivation pour l'étude des α -quantiles est leurs applications en finance, principalement les options α -lookback, qui seront présentées dans le chapitre suivant. Le résultat principal de la première section sera l'identité de Dassios. Ce résultat, qui est intéressant et surprenant, montre une égalité en loi entre l' α -quantile et la somme du supremum et infimum de deux mouvements browniens indépendants. Une explication intuitive pour l'identité de Dassios n'a pas encore été découverte. Ce résultat a été dérivé premièrement dans Dassios (1995), cependant, un résultat similaire a été obtenu pour le cas discret dans Wendel (1960) et Port (1963). La preuve originale de Dassios applique les méthodes de Feynman-Kac, toutefois, deux autres preuves ont été présentées dans ?. Ces deux preuves ont évité d'utiliser les méthodes de Feynman-Kac, mais plutôt, elles ont utilisé les propriétés stochastiques du mouvement brownien. Dans ce chapitre, nous allons présenter la preuve de ?. Dans la dernière section nous discuterons du premier et dernier temps de passage des α -quantiles de Dassios (1995). Le premier temps de passage d'un α -quantile est le premier instant où un

processus atteint un α -quantile prédéterminé dans l'intervalle $[0, T]$. Ces résultats sont moins applicables aux mathématiques financières, cependant, un nouveau type d'option barrière a été introduit dans Dassios (2005) qui nécessite la loi de ces temps d'arrêt. Ces types d'options barrière seront brièvement discutés dans le chapitre suivant.

3.1 L'identité de Dassios

Nous allons commencer par présenter la définition de l' α -quantile, une définition intuitive, et une illustration afin de clarifier la définition.

Définition 3.1.1. Soit $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique. L' α -quantile de Y est défini par,

$$Q_\alpha^Y(T) := \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : A_T^{Y, -, x} > \alpha T \right\},$$

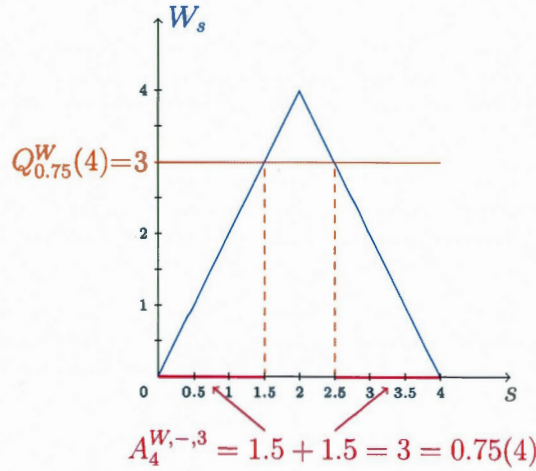
où $0 < \alpha < 1$ et $T \geq 0$.

En mots, $Q_\alpha^Y(T)$ est le niveau minimal tel que le processus reste au-dessous de ce niveau pour plus que $100\alpha\%$ du temps dans l'intervalle $[0, T]$. Voir figure 3.1 pour un exemple d'un α -quantile pour une trajectoire très simple (et irréaliste) d'un processus stochastique. Dans ce mémoire Y sera toujours un mouvement brownien. Quand Y est un mouvement brownien, nous pouvons définir $Q_\alpha^Y(T)$ comme $\left\{ x \in \mathbb{R} : A_T^{Y, -, x} = \alpha T \right\}$ car,

$$\inf \left\{ x \in \mathbb{R} : A_T^{Y, -, x} = \alpha T \right\} \stackrel{\text{p.s.}}{=} \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : A_T^{Y, -, x} > \alpha T \right\}.$$

En mots, si Y est un mouvement brownien, $Q_\alpha^Y(T)$ est la valeur telle que le processus reste au-dessous de ce niveau pour $100\alpha\%$ du temps dans l'intervalle $[0, T]$. Le concept s'apparente aux fonctions quantiles des variables aléatoires. La fonction p -quantile d'une variable aléatoire est définie comme $Q(p) := \inf \{ x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p \}$ où $p \in (0, 1)$. Toutefois, si $F(x)$ est continue alors $Q(p) = F^{-1}(p)$. En mots, si

Figure 3.1 L'alpha quantile de Y avec $T = 4$ et $\alpha = 0.75$, c.-à-d. $Q_{0.75}^Y(4)$.



$F(x)$ est continue, $Q(p)$ est la valeur telle que la probabilité d'être inférieure à cette valeur est p . De plus, afin de simplifier la notation, nous définissons Q_α^Y comme $Q_\alpha^Y(1)$.

Remarque. Si nous prenons la limite en α nous avons que,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} Q_\alpha^Y(T) = m_\alpha^Y(T),$$

et,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} Q_\alpha^Y(T) = M_\alpha^Y(T),$$

ce qui est facile à voir à partir de la définition. De plus, il faut noter que lorsque nous disons que $\alpha = 1$, $Q_1^W(T) := \lim_{\alpha \rightarrow 1} Q_\alpha^Y(T)$ et lorsque nous disons que $\alpha = 0$, $Q_0^W(T) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} Q_\alpha^Y(T)$.

Maintenant, nous présentons une égalité bien connue entre la loi de la quantité de temps qu'un mouvement brownien est positif sur un intervalle fini et le moment où le mouvement brownien atteint son maximum. Ce résultat est non trivial et

joue un rôle important dans la preuve de l'identité de Dassios. Nous allons ensuite présenter l'identité de Dassios et la preuve de ?.

Avant de présenter le premier résultat de cette section nous définissons θ_t^W comme la dernière fois qu'un mouvement brownien arithmétique atteint son maximum dans l'intervalle $[0, t]$, c'est-à-dire, pour un $t \geq 0$ fixé,

$$\theta_t^W := \sup \{s \leq t : W_s = M_s^W\}.$$

Nous avons vu dans le chapitre 1 que $\theta_t^B \stackrel{d}{=} A_t^{B,+,0}$, la proposition suivante généralise ce résultat au cas où $\mu \neq 0$.

Proposition 3.1.1. (?) Pour un $t \geq 0$ fixé,

$$\theta_t^W \stackrel{d}{=} A_t^{W,+,0}.$$

En d'autres mots, la proposition 3.1.1. nous dit que la dernière fois que le processus W atteint sa valeur maximale dans l'intervalle $[0, t]$ possède la même distribution que la quantité de temps que le processus W est positif sur l'intervalle $[0, t]$.

Remarque. Nous avons défini θ_t^W comme la dernière fois que W atteint sa valeur maximale dans l'intervalle $[0, t]$. Toutefois, étant donné que le maximum d'un mouvement brownien est presque sûrement unique, θ_t^W sera également la première fois que W atteint sa valeur maximale dans l'intervalle $[0, t]$, c.-à-d.,

$$\sup \{s \leq t : W_s = M_s^W\} \stackrel{p.s.}{=} \inf \{s \leq t : W_s = M_s^W\}.$$

Avant que nous commencions la preuve de la proposition 3.1.1., nous avons besoin de deux des théorèmes d'équivalence de Lévy, qui seront présentés dans le prochain lemme.

Lemme 3.1.1. (?) Pour un t fixé,

$$M_t^B \stackrel{d}{=} |B_t|,$$

et,

$$M_t^B - B_t \stackrel{d}{=} |B_t|.$$

Nous aurons également besoin du lemme suivant qui est prouvé dans l'annexe C.1.1.

Lemme 3.1.2. Si C est une variable aléatoire qui suit une loi de Cauchy(0,1), alors $\frac{1}{1+C^2}$ suit une loi de l'arc-sinus c.-à-d., pour $0 < u < 1$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{1+C^2} \leq u\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{u}).$$

Nous sommes maintenant prêts à présenter la démonstration de la proposition 3.1.1.

Démonstration de la proposition 3.1.1. Nous allons commencer avec la démonstration du cas où $\mu = 0$, ensuite nous allons présenter la démonstration du cas où $\mu \neq 0$ en omettant les calculs, car ils sont très longs et fastidieux.

(i) Si $\mu = 0$, alors $B = W$ et évidemment $\theta_t^W = \theta_t^B$.

Maintenant, pour $u \in [0, t]$, nous avons que,

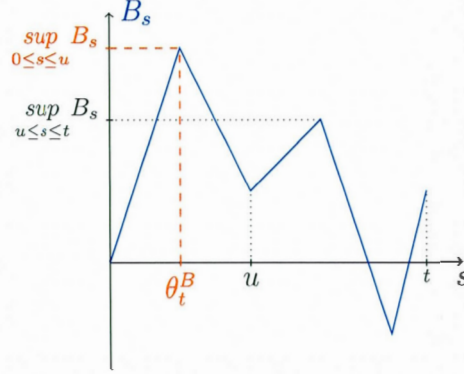
$$\mathbb{P}(\theta_t^B \leq u) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq u} B_s \geq \sup_{u \leq s \leq t} B_s\right),$$

car,

$$\{\theta_t^B \leq u\} = \left\{ \sup_{0 \leq s \leq u} B_s \geq \sup_{u \leq s \leq t} B_s \right\}. \quad (3.1)$$

Voir la figure 3.2 pour une illustration de (3.1) pour une trajectoire fixée.

En ajoutant et en soustrayant B_u , nous avons que,

Figure 3.2 L'équation (3.1) pour une trajectoire fixée.

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq u} B_s \geq \sup_{u \leq s \leq t} B_s \right) = \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq u} B_s \geq \sup_{u \leq s \leq t} (B_s - B_u) + B_u \right).$$

En appliquant la propriété de Markov, nous avons que,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq u} B_s \geq \sup_{u \leq s \leq t} (B_s - B_u) + B_u \right) \stackrel{\text{Markov}}{=} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq u} B_s \geq \sup_{0 \leq s \leq t-u} B_s^* + B_u \right),$$

où $(B_t^*)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard qui est indépendant de $\mathcal{F}_u^B := \sigma\{B_s : s \leq u\}$.

Par définition, cette dernière probabilité est égale à,

$$\mathbb{P} (M_u^B \geq M_{t-u}^{B^*} + B_u) = \mathbb{P} (M_u^B - B_u \geq M_{t-u}^{B^*}).$$

Maintenant avec le lemme 3.1.1., nous avons que,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} (M_u^B - B_u \geq M_{t-u}^{B^*}) &= \mathbb{P} (|B_u| \geq |B_{t-u}^*|) \\ &= \mathbb{P} (\sqrt{u}|B_1| \geq \sqrt{t-u}|B_1^*|) \\ &= \mathbb{P} \left(\frac{|B_1|}{|B_1^*|} \geq \frac{\sqrt{t-u}}{\sqrt{u}} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\frac{B_1^2}{B_1^{*2}} \geq \frac{t-u}{u} \right). \end{aligned}$$

En utilisant le résultat classique suivant : si Z et Z^* sont deux variables aléatoires normales réduites et centrées indépendantes alors,

$$\frac{Z}{Z^*} \sim \text{Cauchy}(0, 1),$$

nous pouvons réécrire cette dernière probabilité de la manière suivante :

$$\mathbb{P}\left(\frac{B_1^2}{B_1^{*2}} \geq \frac{t-u}{u}\right) = \mathbb{P}\left(C^2 \geq \frac{t-u}{u}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{1+C^2} \leq \frac{u}{t}\right),$$

où $C \sim \text{Cauchy}(0, 1)$.

Finalement, en utilisant le lemme 3.1.2., le résultat suit directement :

$$\mathbb{P}(\theta_t^B \leq u) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{1+C^2} \leq \frac{u}{t}\right) \stackrel{\text{Lem.3.1.2.}}{=} \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sqrt{\frac{u}{t}}\right) \stackrel{\text{Thm.1.1.1.}}{=} \mathbb{P}(A_t^{B,+0} \leq u).$$

(ii) Pour démontrer ce résultat dans le cas où $\mu \neq 0$, nous allons utiliser les théorèmes de Girsanov et de Fubini. En effet,

$$\mathbb{P}(\theta_t^W \leq u) = \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{(\theta_t^W \leq u)}\right],$$

et en appliquant le théorème de Girsanov nous avons que,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{(\theta_t^W \leq u)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\mu B_t - \frac{\mu^2}{2}t} \mathbb{I}_{(\theta_t^B \leq u)}\right].$$

Maintenant en appliquant (i) et le lemme 2.1.1. avec $F = \theta_t^B$ et $G = A_t^{B,+0}$ nous avons que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{\mu B_t - \frac{\mu^2}{2}t} \mathbb{I}_{(\theta_t^B \leq u)}\right] &\stackrel{(i)}{=} e^{-\frac{\mu^2}{2}t} \mathbb{E}\left[e^{\mu B_t} \mathbb{I}_{(A_t^{B,+0} \leq u)}\right] \\ &= e^{-\frac{\mu^2}{2}t} \int_0^u \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu x} \mathbb{P}(B_t \in dx, A_t^{B,+0} \in dy) \\ &= e^{-\frac{\mu^2}{2}t} \int_0^u \int_{-\infty}^0 e^{\mu x} \frac{(-x)}{2\pi} \int_y^t \frac{e^{\frac{-x^2}{2(t-s)}}}{[s(t-s)]^{\frac{3}{2}}} ds dx dy \\ &\quad + e^{-\frac{\mu^2}{2}t} \int_0^u \int_0^{\infty} e^{\mu x} \frac{x}{2\pi} \int_{t-y}^t \frac{e^{\frac{-x^2}{2(t-s)}}}{[s(t-s)]^{\frac{3}{2}}} ds dx dy. \end{aligned}$$

Pour la dernière étape en bleu, nous avons utilisé $\mathbb{P}\left(A_t^{B,-,0} \in dy, B_t \in dx\right)$, qui a été dérivé dans la section 2.3, avec le fait que $A_T^{B,+,0} \stackrel{\text{p.s.}}{=} T - A_T^{B,-,0}$ pour trouver $\mathbb{P}\left(A_t^{B,+,0} \in dy, B_t \in dx\right)$.

Maintenant en appliquant le théorème de Fubini, nous avons que,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\theta_t^W \leq u\right) &= \int_0^u \left\{ e^{-\frac{\mu^2}{2}t} \int_y^t \int_{-\infty}^0 e^{\mu x} \frac{(-x)}{2\pi} \frac{e^{\frac{-x^2}{2(t-s)}}}{[s(t-s)]^{\frac{3}{2}}} dx ds \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{\mu^2}{2}t} \int_{t-y}^t \int_0^\infty e^{\mu x} \frac{x}{2\pi} \frac{e^{\frac{-x^2}{2(t-s)}}}{[s(t-s)]^{\frac{3}{2}}} dx ds \right\} dy. \end{aligned}$$

Les détails concernant la résolution de cette intégrale seront omis car ils sont longs et fastidieux. Tous ces détails peuvent être trouvés dans Pechtl (1999) à la page 56. Le résultat final est,

$$\mathbb{P}\left(\theta_t^W \leq u\right) = \int_0^u \mathbb{P}\left(A_t^{W,+,0} \in dy\right) = \mathbb{P}\left(A_t^{W,+,0} \leq u\right).$$

□

Remarque. La forme explicite de $\mathbb{P}\left(A_t^{W,+,0} \in dy\right)$ peut être trouvée dans le théorème 1.2.1.

L'identité de Dassios, qui suit, est une égalité en distribution non triviale entre les α -quantiles et la somme du maximum et du minimum de deux mouvements browniens indépendants. Cette égalité a été obtenue par Dassios (1995) en utilisant les méthodes de Feynman-Kac. La preuve qui sera présentée dans cette section est une deuxième preuve qui a été présentée par ?. Cette preuve utilise plutôt les propriétés du mouvement brownien.

Avant de présenter le théorème, nous allons présenter deux lemmes qui seront utilisés dans la démonstration du théorème.

Lemme 3.1.3. Soit $\mu \in \mathbb{R}$, $W = (W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien avec dérive μ

et $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien avec dérive $(-\mu)$. Pour $0 < \alpha < 1$,

$$Q_\alpha^W \stackrel{d}{=} -Q_{1-\alpha}^X.$$

Démonstration. En partant du côté droit nous avons, par définition, que,

$$\begin{aligned} -Q_{1-\alpha}^X &\equiv -\inf \left\{ x : \int_0^1 \mathbb{I}_{\{X_s < x\}} ds > 1 - \alpha \right\} = \sup \left\{ -x : \int_0^1 \mathbb{I}_{\{X_s < x\}} ds > 1 - \alpha \right\} \\ &= \sup \left\{ -x : 1 - \int_0^1 \mathbb{I}_{\{X_s < x\}} ds < \alpha \right\} \stackrel{\text{p.s.}}{=} \sup \left\{ -x : \int_0^1 \mathbb{I}_{\{X_s > x\}} ds < \alpha \right\} \\ &= \sup \left\{ -x : \int_0^1 \mathbb{I}_{\{-X_s < -x\}} ds < \alpha \right\} \stackrel{(y:=-x)}{=} \sup \left\{ y : \int_0^1 \mathbb{I}_{\{-X_s < y\}} ds < \alpha \right\} \\ &= \sup \left\{ y : \int_0^1 \mathbb{I}_{\{-B_s + \mu s < y\}} ds < \alpha \right\} \stackrel{d}{=} \sup \left\{ y : \int_0^1 \mathbb{I}_{\{B_s + \mu s < y\}} ds < \alpha \right\} \\ &\equiv \inf \left\{ y : \int_0^1 \mathbb{I}_{\{W_s < y\}} ds > \alpha \right\} \equiv Q_\alpha^W \end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.4. (La propriété de retournement temporel du mouvement brownien)

Pour $\mu \in \mathbb{R}$, $T > 0$, et $t \in [0, T]$,

$$W_{T-t} - W_T \stackrel{d}{=} X_t.$$

Ce qui implique que,

$$B_{T-t} - B_T \stackrel{d}{=} B_t.$$

Noter que, avec un mouvement brownien arithmétique, quand on inverse le temps la dérive va de μ à $-\mu$.

Nous sommes maintenant prêts à présenter le résultat principal de cette section.

Théorème 3.1.1. (L'identité de Dassios) Pour $0 < \alpha < 1$ et $T \geq 0$,

$$Q_\alpha^W(T) \stackrel{d}{=} \sup_{0 \leq s \leq \alpha T} W_s + \inf_{0 \leq s \leq (1-\alpha)T} W_s^*,$$

où $W^* = (W_t^*)_{t \geq 0}$ est une copie indépendante de $W = (W_t)_{t \geq 0}$.

Avant de présenter la preuve de l'identité de Dassios nous allons discuter d'un lien important entre $Q_\alpha^W(T)$ et $A_T^{W,-,x}$. Sans perte de généralité (SPDG) nous fixons $T = 1$, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\{Q_\alpha^W \leq x\} = \{A_1^{W,-,x} \geq \alpha\}. \quad (3.2)$$

L'équation (3.2) est plus facile à comprendre avec une illustration, elle est donc présentée dans la figure 3.3. Par souci de simplicité, nous avons utilisé une trajectoire "irréaliste" avec $\alpha = 0.5$ et $x = 3$.

Remarque. Cette relation n'est pas très surprenante car Q_α^W est la fonction inverse de $A_1^{W,-,x}$, c'est-à-dire,

$$A_1^{W,-,Q_\alpha^W} = \alpha \text{ et } Q_{A_1^{W,-,x}}^W = x.$$

Pour $T > 0$ nous avons presque la même relation sauf que nous devons diviser $A_T^{W,-,x}$ par T , c'est-à-dire $\{Q_\alpha^W(T) \leq x\} = \{\frac{1}{T}A_T^{W,-,x} \geq \alpha\}$ et $Q_\alpha^W(T)$ est l'inverse de $\frac{1}{T}A_T^{W,-,x}$.

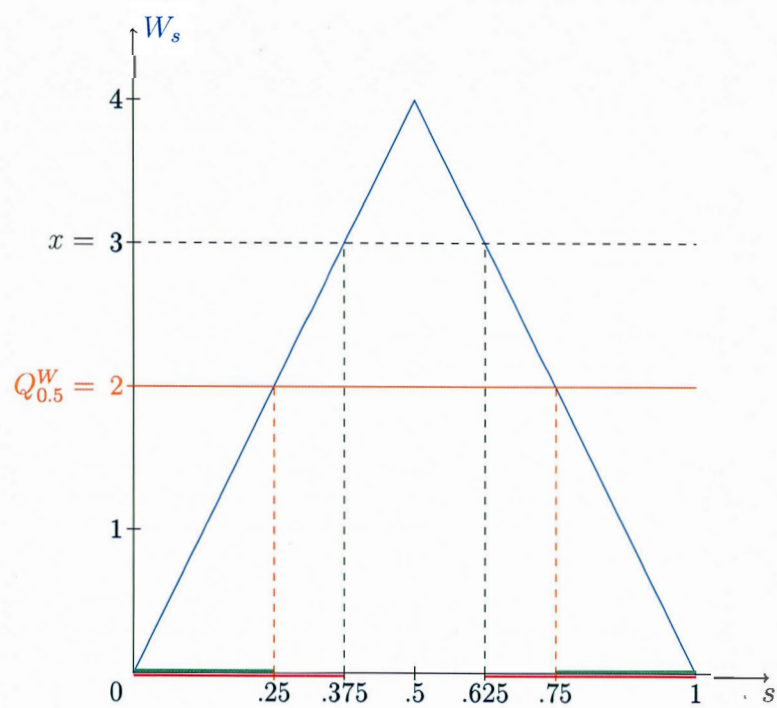
L'équation (3.2) nous donne un moyen facile de faire la transition entre les fonctions de répartition de $Q_\alpha^W(T)$ et $A_1^{W,-,x}$. Nous allons maintenant utiliser (3.2) pour prouver l'identité de Dassios.

Démonstration du Théorème 3.1.1. Nous allons démontrer que,

$$Q_\alpha^W(T) \stackrel{d}{=} \sup_{0 \leq s \leq \alpha T} W_s + \inf_{0 \leq s \leq (1-\alpha)T} W_s^*,$$

en montrant que leurs fonctions de répartition sont égales. Nous allons présenter cette démonstration en trois parties. Dans la partie (i), nous allons démontrer le cas où $x = 0$. Même si ce cas est simple, nous l'utiliserons pour illustrer clairement des outils qui seront réutilisés dans les parties (ii) et (iii), où $x < 0$ et $x > 0$, respectivement.

Figure 3.3 $\{Q_\alpha^W \leq x\} = \{A_1^{W,-,x} \geq \alpha\}$ avec $x = 3$ et $\alpha = .5$



$$\alpha = 0.25 + 0.25 = .5$$

$$A_1^{W,-,x} = .75$$

(i) Le cas où $x = 0$.

Pour commencer, nous allons appliquer (3.2) avec $x = 0$ pour obtenir,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^W \leq 0) = \mathbb{P}(A_1^{W,-,0} \geq \alpha).$$

Maintenant avec le fait que $A_1^{W,-,0} \stackrel{\text{p.s.}}{=} 1 - A_1^{W,+,0}$, nous avons que,

$$\mathbb{P}(A_1^{W,-,0} \geq \alpha) = \mathbb{P}(A_1^{W,+,0} \leq 1 - \alpha).$$

D'après la proposition 3.1.1. nous avons que,

$$\mathbb{P}(A_1^{W,+,0} \leq 1 - \alpha) = \mathbb{P}(\theta_1^W \leq 1 - \alpha).$$

En utilisant (3.1), nous pouvons réécrire cette dernière probabilité comme suit,

$$\mathbb{P}(\theta_1^W \leq 1 - \alpha) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1-\alpha} W_s \geq \sup_{1-\alpha \leq s \leq 1} W_s\right).$$

En soustrayant $W_{1-\alpha}$ des deux côtés nous obtenons,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1-\alpha} W_s \geq \sup_{1-\alpha \leq s \leq 1} W_s\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1-\alpha} W_s - W_{1-\alpha} \geq \sup_{1-\alpha \leq s \leq 1} W_s - W_{1-\alpha}\right),$$

et en appliquant la propriété de Markov nous avons que,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1-\alpha} W_s - W_{1-\alpha} \geq \sup_{1-\alpha \leq s \leq 1} W_s - W_{1-\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1-\alpha} W_s - W_{1-\alpha} \geq \sup_{0 \leq s \leq \alpha} W_s^*\right),$$

où $W^* = (W_t^*)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien avec dérive μ qui est indépendant de $\mathcal{F}_{1-\alpha}^W$.

Maintenant avec la propriété de retournement temporel du mouvement brownien nous avons que,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1-\alpha} W_s - W_{1-\alpha} \geq \sup_{0 \leq s \leq \alpha} W_s^*\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1-\alpha} W_{(1-\alpha)-s} - W_{1-\alpha} \geq \sup_{0 \leq s \leq \alpha} W_s^*\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1-\alpha} X_s \geq \sup_{0 \leq s \leq \alpha} W_s^*\right), \end{aligned}$$

où $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien avec dérive $(-\mu)$ pour $t < 1 - \alpha$.

Par définition, nous avons que,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq 1-\alpha} X_s \geq \sup_{0 \leq s \leq \alpha} W_s^* \right) = \mathbb{P} (M_{1-\alpha}^X \geq M_\alpha^{W^*}).$$

Finalement, avec le fait que $M_{1-\alpha}^X \stackrel{d}{=} -m_{1-\alpha}^W$ nous avons que,

$$\mathbb{P} (M_{1-\alpha}^X \geq M_\alpha^{W^*}) = \mathbb{P} (M_\alpha^{W^*} + m_{1-\alpha}^W \leq 0),$$

et donc,

$$\mathbb{P} (Q_\alpha^W \leq 0) = \mathbb{P} (M_\alpha^{W^*} + m_{1-\alpha}^W \leq 0),$$

qui est le résultat souhaité.

(ii) Pour $x < 0$ nous avons que,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} (Q_\alpha^W \leq x) \\ & \stackrel{(3.2)}{=} \mathbb{P} (A_1^{W, -, x} \geq \alpha) \\ & \equiv \mathbb{P} \left(\int_0^1 \mathbb{I}_{(W_s \leq x)} ds \geq \alpha \right) \\ & = \mathbb{P} \left(\int_{\tau_x^W}^1 \mathbb{I}_{(W_s \leq x)} ds \geq \alpha, \tau_x^W \leq 1 \right), \text{ car } x < 0, \\ & = \mathbb{E} \left[\mathbb{P} \left(\int_{\tau_x^W}^1 \mathbb{I}_{(W_s - x \leq 0)} ds \geq \alpha, \tau_x^W \leq 1 \middle| \tau_x^W \right) \right] \\ & = \int_0^1 \mathbb{P} \left(\int_u^1 \mathbb{I}_{(W_s - W_u \leq 0)} ds \geq \alpha \middle| \tau_x^W = u \right) h(u; x, W) du \\ & \stackrel{\text{Markov}}{=} \int_0^1 \mathbb{P} \left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(W_r^* \leq 0)} dr \geq \alpha \right) h(u; x, W) du \\ & \equiv \int_0^1 \mathbb{P} (A_{1-u}^{W^*, -, 0} \geq \alpha) h(u; x, W) du, \end{aligned}$$

où $W^* = (W_t^*)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien avec dérive μ qui est indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_x^W}^W$.

Si $u \geq 1 - \alpha$, ce qui implique que $1 - u \leq \alpha$, alors $\mathbb{P}(A_{1-u}^{W^*, -, 0} \geq \alpha) = 0$. Ce qui nous donne que,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathbb{P}(A_{1-u}^{W^*, -, 0} \geq \alpha) h(u; x, W) du &= \int_0^{1-\alpha} \mathbb{P}(A_{1-u}^{W^*, -, 0} \geq \alpha) h(u; x, W) du \\ &= \int_0^{1-\alpha} \mathbb{P}((1-u) - A_{1-u}^{W^*, +, 0} \geq \alpha) h(u; x, W) du, \end{aligned}$$

car $A_t^{W, -, a \text{ p.s.}} = t - A_t^{W, +, a}$ pour tout $t \geq 0$ fixé.

Donc,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^W \leq x) = \int_0^{1-\alpha} \mathbb{P}((1-u) - A_{1-u}^{W^*, +, 0} \geq \alpha) h(u; x, W) du.$$

Maintenant en utilisant la proposition 3.1.1. nous avons que,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Q_\alpha^W \leq x) &= \int_0^{1-\alpha} \mathbb{P}((1-u) - A_{1-u}^{W^*, +, 0} \geq \alpha) h(u; x, W) du \\ &\stackrel{\text{prop.3.1.1.}}{=} \int_0^{1-\alpha} \mathbb{P}((1-u) - \theta_{1-u}^{W^*} \geq \alpha) h(u; x, W) du \\ &= \int_0^{1-\alpha} \mathbb{P}(\theta_{1-u}^{W^*} \leq 1 - u - \alpha) h(u; x, W) du \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{P} \left(\theta_{1-\tau_x^W}^{W^*} \leq 1 - \tau_x^W - \alpha, \tau_x^W \leq 1 - \alpha \middle| \tau_x^W \right) \right] \\ &= \mathbb{P} \left(\theta_{1-\tau_x^W}^{W^*} \leq 1 - \tau_x^W - \alpha, \tau_x^W \leq 1 - \alpha \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pour la prochaine étape nous allons utiliser (3.3), avec le fait que,

$$\{\theta_{1-u}^{W^*} \leq 1 - u - \alpha\} = \left\{ \sup_{0 \leq s \leq 1-u-\alpha} W_s^* \geq \sup_{1-u-\alpha \leq s \leq 1-u} W_s^* \right\}, \quad (3.4)$$

voir la figure 3.2 pour une illustration de cette égalité pour une trajectoire fixée.

De plus, nous allons utiliser la propriété de Markov, ce qui nous donne que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Q_\alpha^W \leq x) &= \mathbb{P}\left(\theta_{1-\tau_x^W}^{W^*} \leq 1 - \tau_x^W - \alpha, \tau_x^W \leq 1 - \alpha\right) \\
&\stackrel{(3.4)}{=} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1 - \tau_x^W - \alpha} W_s^* \geq \sup_{1 - \tau_x^W - \alpha \leq s \leq 1 - \tau_x^W} W_s^*, \tau_x^W \leq 1 - \alpha\right) \\
&\stackrel{\text{Markov}}{=} \mathbb{P}\left(\sup_{\tau_x^W \leq r \leq 1 - \alpha} W_r^* \geq \sup_{1 - \alpha \leq r \leq 1} W_r^*, \tau_x^W \leq 1 - \alpha\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{\tau_x^W \leq r \leq 1 - \alpha} W_r^* - W_{1-\alpha}^* \geq \sup_{1 - \alpha \leq r \leq 1} W_r^* - W_{1-\alpha}^*, \tau_x^W \leq 1 - \alpha\right) \\
&\stackrel{\text{Markov}}{=} \mathbb{P}\left(\sup_{\tau_x^W \leq r \leq 1 - \alpha} W_r^* - W_{1-\alpha}^* \geq \sup_{0 \leq r \leq \alpha} W_r^{**}, \tau_x^W \leq 1 - \alpha\right),
\end{aligned}$$

où $W^{**} = (W_t^{**})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard avec dérive μ qui est indépendant de $\mathcal{F}_{1-\alpha}^{W^*} := \sigma\{W_t^* : t \leq 1 - \alpha\}$ et $\mathcal{F}_{\tau_x^W}^W$. Par définition, cette dernière probabilité est égale à,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{\tau_x^W \leq r \leq 1 - \alpha} W_r^* - W_{1-\alpha}^* \geq M_\alpha^{W^{**}}, \tau_x^W \leq 1 - \alpha\right).$$

Nous allons maintenant définir X_r^* comme $W_{(1-\alpha)-r}^* - W_{1-\alpha}^*$ alors, par la propriété de retournement temporel du mouvement brownien, X_r^* est un mouvement brownien avec dérive $(-\mu)$ pour $r \leq 1 - \alpha$. Avec cela, nous avons que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Q_\alpha^W \leq x) &= \mathbb{P}\left(\sup_{\tau_x^W \leq r \leq 1 - \alpha} W_r^* - W_{1-\alpha}^* \geq M_\alpha^{W^{**}}, \tau_x^W \leq 1 - \alpha\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq r \leq (1-\alpha) - \tau_x^W} (W_{(1-\alpha)-r}^* - W_{1-\alpha}^*) \geq M_\alpha^{W^{**}}, \tau_x^W \leq 1 - \alpha\right) \\
&\equiv \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq r \leq (1-\alpha) - \tau_x^W} X_r^* \geq M_\alpha^{W^{**}}, \tau_x^W \leq 1 - \alpha\right) \\
&\stackrel{\text{Markov}}{=} \mathbb{P}\left(\sup_{\tau_x^W \leq s \leq 1 - \alpha} X_s^* - X_{\tau_x^W}^* \geq M_\alpha^{W^{**}}, \tau_x^W \leq 1 - \alpha\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^W \leq x) = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(\sup_{\tau_x^W \leq s \leq 1 - \alpha} X_s^* - X_{\tau_x^W}^* \geq M_\alpha^{W^{**}}, \tau_x^W \leq 1 - \alpha \middle| \tau_x^W\right)\right].$$

Maintenant en utilisant le fait que $\tau_x^W \stackrel{d}{=} \tau_{-x}^{X^*}$ nous avons que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Q_\alpha^W \leq x) &= \mathbb{E} \left[\mathbb{P} \left(\sup_{\tau_{-x}^{X^*} \leq s \leq 1-\alpha} X_s^* - X_{\tau_{-x}^{X^*}}^* \geq M_\alpha^{W^{**}}, \tau_{-x}^{X^*} \leq 1-\alpha \middle| \tau_{-x}^{X^*} \right) \right] \\
&= \mathbb{P} \left(\sup_{\tau_{-x}^{X^*} \leq s \leq 1-\alpha} X_s^* - (-x) \geq M_\alpha^{W^{**}}, \tau_{-x}^{X^*} \leq 1-\alpha \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\sup_{\tau_{-x}^{X^*} \leq s \leq 1-\alpha} X_s^* \geq M_\alpha^{W^{**}} - x, \tau_{-x}^{X^*} \leq 1-\alpha \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq 1-\alpha} X_s^* \geq M_\alpha^{W^{**}} - x, \tau_{-x}^{X^*} \leq 1-\alpha \right), \text{ car } (-x) > 0, \\
&= \mathbb{P} \left(\tau_{(M_\alpha^{W^{**}} - x)}^{X^*} \leq 1-\alpha, \tau_{-x}^{X^*} \leq 1-\alpha \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\tau_{(M_\alpha^{W^{**}} - x)}^{X^*} \leq 1-\alpha \right), \text{ car } (M_\alpha^{W^{**}} - x) > (-x) \text{ p.s.}, \\
&= \mathbb{P} \left(M_{1-\alpha}^{X^*} \geq M_\alpha^{W^{**}} - x \right) \\
&= \mathbb{P} \left(M_\alpha^{W^{**}} - M_{1-\alpha}^{X^*} \leq x \right).
\end{aligned}$$

Finalement, avec le fait que $M_{1-\alpha}^X \stackrel{d}{=} -m_{1-\alpha}^W$, nous avons que,

$$\mathbb{P} \left(M_\alpha^{W^{**}} - M_{1-\alpha}^{X^*} \leq x \right) = \mathbb{P} \left(M_\alpha^{W^{**}} + m_{1-\alpha}^{W^*} \leq x \right),$$

ce qui nous donne le résultat souhaité.

(iii) Pour le cas où $x > 0$, nous allons utiliser le lemme 3.1.3. et la partie (ii) comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Q_\alpha^W \leq x) &\stackrel{\text{lem.3.1.2.}}{=} \mathbb{P}(-Q_{1-\alpha}^X \leq x) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Q_{1-\alpha}^X \leq -x) \\
&\stackrel{(i)}{=} 1 - \mathbb{P}(M_{1-\alpha}^{X^*} + m_\alpha^X \leq -x), \text{ car } (-x) < 0, \\
&= \mathbb{P}(-M_{1-\alpha}^{X^*} - m_\alpha^X \leq x).
\end{aligned}$$

Avec l'aide des identités,

$$-M_{1-\alpha}^{X^*} \stackrel{d}{=} m_{1-\alpha}^{W^*} \text{ et } -m_\alpha^X \stackrel{d}{=} M_\alpha^W,$$

nous avons finalement que,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^W \leq x) = \mathbb{P}(m_{1-\alpha}^{W*} + M_\alpha^W \leq x).$$

Ceci achève la démonstration de l'identité de Dassios. \square

Puisque $Q_\alpha^W(T)$ peut être représenté comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes il est possible de trouver la fonction de densité de $Q_\alpha^W(T)$ par une convolution des densités de M_α^W et $m_{1-\alpha}^{W*}$ c.-à-d.,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^W(T) \in dx) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(M_{\alpha T}^W \in d(x-u)) \mathbb{P}(m_{(1-\alpha)T}^W \in du) du.$$

Pour $\mu = 0$, nous pouvons obtenir la fonction de densité explicite de $Q_\alpha^B(T)$ avec la convolution suivante,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B(T) \in dx) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(M_{\alpha T}^B \in d(x-u)) \mathbb{P}(m_{(1-\alpha)T}^B \in du) du,$$

où,

$$\mathbb{P}(M_t^B \in dx) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

et,

$$\mathbb{P}(m_t^B \in dx) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, & x \leq 0. \end{cases}$$

Cela nous donne que,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B(T) \in dx) = \begin{cases} \int_{-\infty}^0 \sqrt{\frac{2}{\pi T \alpha}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2t}} \sqrt{\frac{2}{\pi T(1-\alpha)}} e^{-\frac{u^2}{2T(1-\alpha)}} du, & x \geq 0, \\ \int_{-\infty}^x \sqrt{\frac{2}{\pi T \alpha}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2t}} \sqrt{\frac{2}{\pi T(1-\alpha)}} e^{-\frac{u^2}{2T(1-\alpha)}} du, & x \leq 0. \end{cases}$$

Remarque. Si $x \geq 0$ alors $u \in (-\infty, 0]$ car si $u > 0$ alors $\mathbb{P}(m_{(1-\alpha)T}^B \in du) = 0$.
Si $x \leq 0$ alors $u \in (-\infty, x]$ car si $u > x$ alors $\mathbb{P}(M_{\alpha T}^B \in d(x-u)) = 0$.

La solution de cette convolution est présentée dans le prochain corollaire.

Corollaire 3.1.1. (?) Pour $T > 0$, $\mu = 0$, et $0 < \alpha < 1$, la fonction de densité de $Q_\alpha^B(T)$ est donnée par,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B(T) \in dx) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} \left(1 - \Phi \left(x \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha T}} \right) \right) dx,$$

pour $x \geq 0$, et,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B(T) \in dx) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} \Phi \left(x \sqrt{\frac{\alpha}{(1-\alpha)T}} \right) dx,$$

pour $x \leq 0$.

Voir les figures 3.4 et 3.5 pour une illustration de cette densité par rapport aux densités de M_1^W et m_1^{W*} . Comme prévu, cette densité converge vers la densité de M_1^W quand $\alpha \rightarrow 1$ et cette densité converge vers la densité de m_1^W quand $\alpha \rightarrow 0$.

3.2 Temps de passage des α -quantiles

Dans cette section, nous allons présenter les résultats de Dassios (2005) sur les temps d'atteinte des α -quantiles du mouvement brownien. Nous allons commencer par définir la première et dernière fois que le mouvement brownien atteint un α -quantile. Ensuite, nous allons présenter la dérivation de la loi de la première fois que le mouvement brownien atteint un α -quantile. Cette loi est, étonnamment, très proche d'une loi de l'arc-sinus. Enfin, nous présenterons la dérivation de la loi conjointe de la première et dernière fois que le mouvement brownien atteint un α -quantile, la valeur de l' α -quantile et la valeur finale du mouvement brownien dans l'intervalle $[0, T]$.

Définition 3.2.1. Soit $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique. La première fois que Y atteint l' α -quantile $Q_\alpha^Y(T)$, pour $0 < \alpha < 1$ et $T \geq 0$, est définie comme,

$$\eta_\alpha^Y(T) := \inf \{s \in [0, T] : Y_s = Q_\alpha^Y(T)\},$$

Figure 3.4 Les fonction de densité de M_1^B et Q_α^B pour différents α

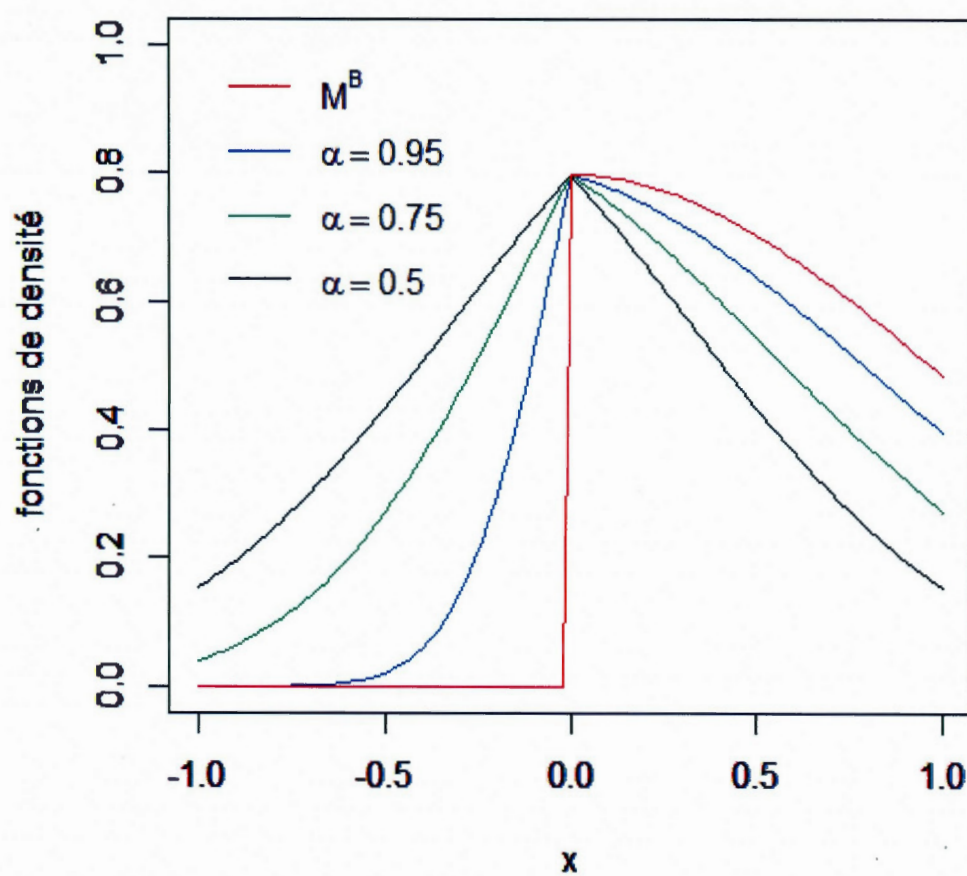


Figure 3.5 Les fonction de densité de m_1^B et Q_α^B pour différents α

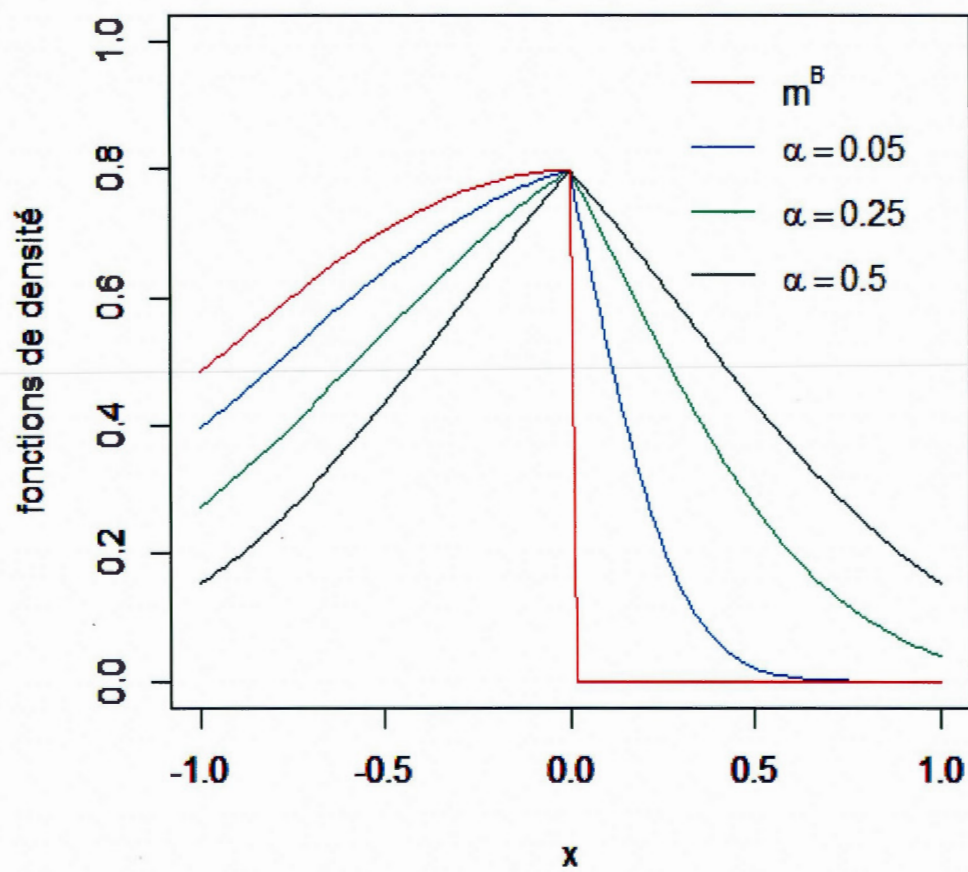
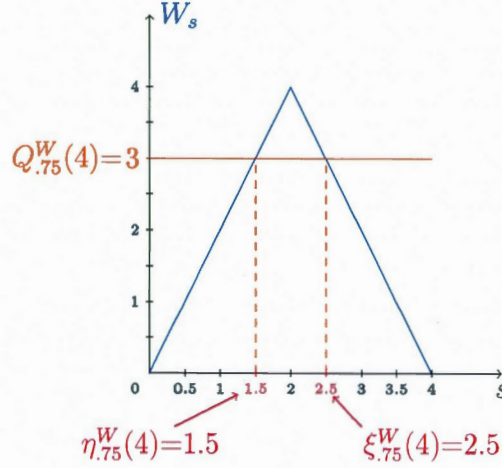


Figure 3.6 $\eta_\alpha^W(T)$ et $\xi_\alpha^W(T)$ avec $\alpha = .75$ et $T = 4$



et la dernière fois que Y atteint l' α -quantile $Q_\alpha(T)$ est définie comme,

$$\xi_\alpha^Y(T) := \sup \{s \in [0, T] : Y_s = Q_\alpha^Y(T)\}.$$

Ces deux temps de passage sont illustrés dans la figure 3.6. Pour la simplicité, nous avons utilisé une trajectoire "irréaliste".

3.2.1 Les lois de $\eta_\alpha^B(T)$ et $\xi_\alpha^B(T)$

Dans cette section, nous allons commencer par trouver la loi conjointe de

$$(Q_\alpha^B(T), \eta_\alpha^B(T)).$$

Ensuite, nous allons utiliser cette loi conjointe pour trouver la loi de $\eta_\alpha^B(T)$. Pour simplifier la notation, sans perte de généralité, pour tous les résultats de cette section, nous allons fixer $T = 1$ avec $\eta_\alpha^B := \eta_\alpha^B(1)$, $\xi_\alpha^B := \xi_\alpha^B(1)$ et $Q_\alpha^B := Q_\alpha^B(1)$. Avant de présenter le premier théorème de cette section nous allons présenter quelques lemmes et propositions qui seront utilisés dans la démonstration du théorème.

Lemme 3.2.1. (?) Pour $0 < \alpha < 1$,

$$Q_{\alpha}^{-B} \stackrel{p.s.}{=} -Q_{1-\alpha}^B.$$

Démonstration. Nous allons commencer avec la définition de $-Q_{1-\alpha}^B$.

$$\begin{aligned} -Q_{1-\alpha}^B &:= -\inf \left\{ x : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s < x)} ds > 1 - \alpha \right\} = \sup \left\{ -x : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s < x)} ds > 1 - \alpha \right\} \\ &= \sup \left\{ -x : 1 - \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s < x)} ds < \alpha \right\} = \sup \left\{ -x : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s > x)} ds < \alpha \right\} \\ &= \sup \left\{ -x : \int_0^1 \mathbb{I}_{(-B_s < -x)} ds < \alpha \right\} \stackrel{(y := -x)}{=} \sup \left\{ y : \int_0^1 \mathbb{I}_{(-B_s < y)} ds < \alpha \right\} \\ &= \inf \left\{ y : \int_0^1 \mathbb{I}_{(-B_s < y)} ds > \alpha \right\} \equiv Q_{\alpha}^{-B} \end{aligned}$$

□

Avec le Lemme 3.2.1. nous pouvons démontrer le prochain lemme.

Lemme 3.2.2. (?) Pour $0 < \alpha < 1$,

$$\eta_{\alpha}^{-B} \stackrel{p.s.}{=} \eta_{1-\alpha}^B,$$

et,

$$\xi_{\alpha}^{-B} \stackrel{p.s.}{=} \xi_{1-\alpha}^B.$$

Démonstration. (i) Nous allons commencer avec η_{α}^{-B} .

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha}^{-B} &:= \inf \{ t : -B_t = Q_{\alpha}^{-B} \} \\ &\stackrel{\text{Lem. 3.2.1.}}{=} \inf \{ t : B_t = Q_{1-\alpha}^B \} \\ &\equiv \eta_{1-\alpha}^B. \end{aligned}$$

(ii) Nous allons commencer avec ξ_α^{-B} .

$$\begin{aligned}\xi_\alpha^{-B} &:= \sup \{t : -B_t = Q_\alpha^{-B}\} \\ &\stackrel{\text{Lem. 3.2.1.}}{=} \sup \{t : B_t = Q_{1-\alpha}^B\} \\ &\equiv \xi_{1-\alpha}^{-B}.\end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.3. (?) Pour $c \geq 0$ et $0 < u < \alpha < 1$,

$$\mathbb{P} \left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds < \alpha - u \right) = \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq \alpha-u} B_s > \sup_{\alpha-u \leq s \leq 1-u} B_s, \sup_{0 \leq s \leq \alpha-u} B_s > c \right).$$

Démonstration. Nous allons commencer en conditionnant sur $\tau_c := \inf\{s > 0 : B_s = c\}$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P} \left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds < \alpha - u \right) \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{P} \left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds < \alpha - u \middle| \tau_c \right) \right] \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P} \left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds < \alpha - u \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr) \\ &= \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds < \alpha - u \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr),\end{aligned}$$

car si $r \geq \alpha - u$, alors $\mathbb{P} \left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds < \alpha - u \right) = 0$.

Maintenant nous avons que :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds < \alpha - u \right) \\
&= \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds < \alpha - u \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr) \\
&= \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(\int_0^r \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds + \int_r^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds < \alpha - u \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr) \\
&= \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(r + \int_r^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds < \alpha - u \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr), \text{ car } c \geq 0 \\
&= \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(\int_r^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s - B_r \leq 0)} ds < \alpha - u - r \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr) \\
&\stackrel{\text{Markov}}{=} \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(\int_0^{1-u-r} \mathbb{I}_{(B_s^* \leq 0)} ds < \alpha - u - r \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr) \\
&\equiv \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(A_{1-u-r}^{B^*, -, 0} < \alpha - u - r \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr),
\end{aligned}$$

où $B^* = (B_t^*)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard qui est indépendant de \mathcal{F}_u^B et $\mathcal{F}_{\tau_c^*}^{B^*}$.

Maintenant avec la proposition 3.1.1. nous avons que :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds < \alpha - u \right) \\
&= \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(A_{1-u-r}^{B^*, -, 0} < \alpha - u - r \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr) \\
&= \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(A_{1-u-r}^{B^*, +, 0} < \alpha - u - r \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr) \\
&\stackrel{\text{prop. 3.1.1.}}{=} \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(\theta_{1-u-r}^{B^*} < \alpha - u - r \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr) \\
&= \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq \alpha-u-r} B_s^* > \sup_{\alpha-u-r \leq s \leq 1-u-r} B_s^* \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr).
\end{aligned}$$

Voir la figure 3.2 pour une illustration de l'égalité des ensembles dans la dernière étape pour une trajectoire fixée.

Donc,

$$\mathbb{P} \left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds < \alpha - u \right)$$

$$= \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq \alpha-u-r} B_s^* > \sup_{\alpha-u-r \leq s \leq 1-u-r} B_s^* \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr).$$

Maintenant avec la propriété de Markov nous avons que :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq \alpha-u-r} B_s^* > \sup_{\alpha-u-r \leq s \leq 1-u-r} B_s^* \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr) \\ & \stackrel{\text{Markov}}{=} \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(\sup_{r \leq s \leq \alpha-u} B_s - B_r > \sup_{\alpha-u \leq s \leq 1-u} B_s - B_r \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr) \\ & = \int_0^{\alpha-u} \mathbb{P} \left(\sup_{r \leq s \leq \alpha-u} B_s > \sup_{\alpha-u \leq s \leq 1-u} B_s \right) \mathbb{P}(\tau_c \in dr) \\ & = \mathbb{P} \left(\sup_{\tau_c \leq s \leq \alpha-u} B_s > \sup_{\alpha-u \leq s \leq 1-u} B_s, \tau_c < \alpha-u \right) \\ & = \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq \alpha-u} B_s > \sup_{\alpha-u \leq s \leq 1-u} B_s, \tau_c < \alpha-u \right), \text{ car } c \geq 0, \\ & = \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq \alpha-u} B_s > \sup_{\alpha-u \leq s \leq 1-u} B_s, \sup_{0 \leq s \leq \alpha-u} B_s > c \right), \end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{P} \left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s \leq c)} ds < \alpha-u \right) = \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq \alpha-u} B_s > \sup_{\alpha-u \leq s \leq 1-u} B_s, \sup_{0 \leq s \leq \alpha-u} B_s > c \right).$$

□

Proposition 3.2.1. (?) Pour $0 < u < \alpha < 1$ et $b \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B > M_u^B, M_u^B > b) = \mathbb{P}(u < \theta_1^B < \alpha, M_u^B > b).$$

Démonstration. En utilisant (3.2) nous avons que,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Q_\alpha^B > M_u^B, M_u^B > b) & \stackrel{(3.2)}{=} \mathbb{P}(A_1^{B,-,M_u^B} < \alpha, M_u^B > b) \\ & \equiv \mathbb{P} \left(\int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s \leq M_u^B)} ds < \alpha, M_u^B > b \right), \end{aligned}$$

et puisque,

$$\int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s \leq M_u^B)} ds = \int_0^u \mathbb{I}_{(B_s \leq M_u^B)} ds + \int_u^1 \mathbb{I}_{(B_s \leq M_u^B)} ds,$$

nous avons que,

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s \leq M_u^B)} ds < \alpha \right\} &= \left\{ \underbrace{\int_0^u \mathbb{I}_{(B_s \leq M_u^B)} ds}_{=u} + \int_u^1 \mathbb{I}_{(B_s \leq M_u^B)} ds < \alpha \right\} \\ &= \left\{ \int_u^1 \mathbb{I}_{(B_s \leq M_u^B)} ds < \alpha - u \right\}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Q_\alpha^B > M_u^B, M_u^B > b) &= \mathbb{P}\left(\int_u^1 \mathbb{I}_{(B_s \leq M_u^B)} ds < \alpha - u, M_u^B > b\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\int_u^1 \mathbb{I}_{(B_s - B_u \leq M_u^B - B_u)} ds < \alpha - u, M_u^B > b\right) \\ &\stackrel{\text{Markov}}{=} \mathbb{P}\left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s^* \leq M_u^B - B_u)} ds < \alpha - u, M_u^B > b\right), \end{aligned}$$

où $B^* = (B_t^*)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard qui est indépendant de $\mathcal{F}_u^B := \sigma\{B_t : t \leq u\}$. En conditionnant sur \mathcal{F}_u^B et en définissant $C_u := M_u^B - B_u \geq 0$ nous avons que,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B > M_u^B, M_u^B > b) = \mathbb{E} \left[\mathbb{P} \left(\int_0^{1-u} \mathbb{I}_{(B_s^* \leq C_u)} ds < \alpha - u, M_u^B > b \middle| \mathcal{F}_u^B \right) \right]. \quad (3.5)$$

Maintenant, en appliquant le lemme 3.2.3. avec $c = C_u$ nous avons que,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Q_\alpha^B > M_u^B, M_u^B > b) \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq \alpha-u} B_s^* > \sup_{\alpha-u \leq s \leq 1-u} B_s^*, \sup_{0 \leq s \leq \alpha-u} B_s^* > c, M_u^B > b \middle| \mathcal{F}_u^B \right) \right]. \end{aligned}$$

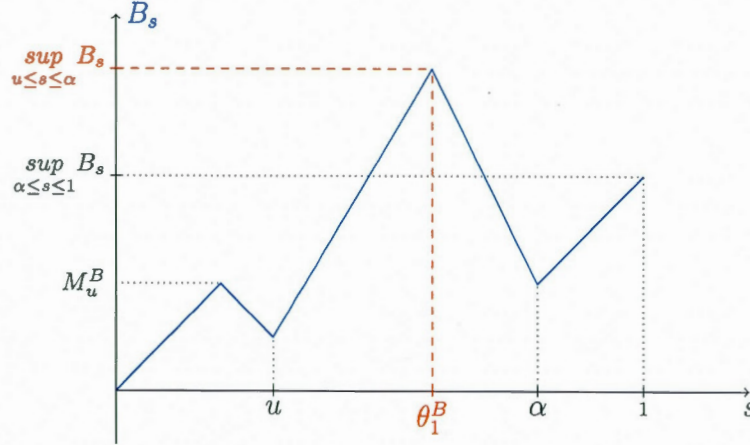
Avec la définition de c et la propriété de Markov cette dernière espérance est égale à,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > \sup_{\alpha \leq s \leq 1} B_s, \sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > M_u^B, M_u^B > b \right) = \mathbb{P}(u < \theta_1^B < \alpha, M_u^B > b),$$

car

$$\left\{ \sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > \sup_{\alpha \leq s \leq 1} B_s, \sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > M_u^B \right\} = \{u < \theta_1^B < \alpha\}. \quad (3.6)$$

Figure 3.7 L'équation (3.6) pour une trajectoire fixée.



Une illustration de (3.6) pour une trajectoire fixé est donné dans la figure 3.7.

Donc,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B > b, M_u^B > b) = \mathbb{P}(u < \theta_1^B < \alpha, M_u^B > b)$$

□

Proposition 3.2.2. (?) Pour $0 < u < \alpha < 1$ et $b \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B > b, b > M_u^B) = \mathbb{P}\left(u < \theta_1^B < \alpha, \sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > b, b > M_u^B\right).$$

La preuve de la proposition 3.2.2. peu être trouvée dans l'annexe C.1.2.

Nous sommes maintenant prêts à présenter le théorème principal de cette section.

Théorème 3.2.1. (?) Soit $0 < \alpha < 1$,

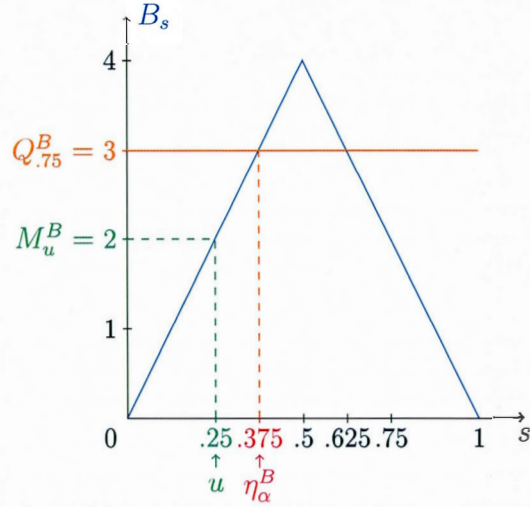
(i) pour $b \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B \in db, \eta_\alpha^B \in du) = \mathbb{P}(M_1^B \in db, \theta_1^B \in du) \cdot \mathbb{I}_{(0 < u < \alpha)},$$

(ii) pour $b < 0$,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B \in db, \eta_\alpha^B \in du) = \mathbb{P}(M_1^B \in d|b|, \theta_1^B \in du) \cdot \mathbb{I}_{(0 < u < (1-\alpha))}.$$

Figure 3.8 $\{\eta_\alpha^B > u\} = \{Q_\alpha^B > M_u^B\}$ avec $u = .25$ et $\alpha = .75$



Avant de commencer la démonstration nous devons présenter la relation importante suivante,

$$\{\eta_\alpha^B > u\} = \{Q_\alpha^B > M_u^B\}. \quad (3.7)$$

Cette relation est illustrée avec une trajectoire fixée dans la figure 3.6. Pour simplifier, nous avons utilisé une trajectoire "irréaliste".

Démonstration. (i) Avec l'équation (3.7) nous avons que,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Q_\alpha^B > b, \eta_\alpha^B > u) &\stackrel{(3.7)}{=} \mathbb{P}(Q_\alpha^B > b, Q_\alpha^B > M_u^B) \\ &= \mathbb{P}(Q_\alpha^B > M_u^B, M_u^B > b) + \mathbb{P}(Q_\alpha^B > b, b > M_u^B). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Avec les propositions 3.2.1. et 3.2.2. nous avons que,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Q_\alpha^B > b, \eta_\alpha^B > u) &= \mathbb{P}(u < \theta_1^B < \alpha, M_u^B > b) \\
 &\quad + \mathbb{P}\left(u < \theta_1^B < \alpha, \sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > b, b > M_u^B\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(u < \theta_1^B < \alpha, \sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > b\right) \\
 &= \mathbb{P}(u < \theta_1^B < \alpha, M_1^B > b).
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B \in db, \eta_\alpha^B \in du) = \mathbb{P}(\theta_1^B \in du, M_1^B \in db) \mathbb{I}_{(0 < u < \alpha)}, \quad (3.9)$$

ce qui achève la démonstration de (i).

(ii) Avec les lemmes 3.2.1. et 3.2.2. nous avons que,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Q_\alpha^B < b, \eta_\alpha^B > u) &= \mathbb{P}(Q_\alpha^{-B} < b, \eta_\alpha^{-B} > u) \\
 &\stackrel{\text{Lem.3.2.1}}{=} \mathbb{P}(-Q_{1-\alpha}^B < b, \eta_\alpha^{-B} > u) \\
 &\stackrel{\text{Lem.3.2.2}}{=} \mathbb{P}(Q_{1-\alpha}^B > -b, \eta_{1-\alpha}^B > u) \\
 &= \mathbb{P}(Q_{1-\alpha}^B > |b|, \eta_{1-\alpha}^B > u),
 \end{aligned}$$

et avec (i) ceci implique que,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B < b, \eta_\alpha^B > u) = \mathbb{P}(M_1^B > |b|, u < \theta_1^B < 1 - \alpha),$$

qui mène au résultat souhaité,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B \in db, \eta_\alpha^B \in du) = \mathbb{P}(M_1^B \in d|b|, \theta_1^B \in du) \mathbb{I}_{(0 < u < 1 - \alpha)}.$$

□

La raison pour laquelle nous voulions exprimer la loi de $(Q_\alpha^B, \eta_\alpha^B)$ en termes de la loi de (M_1^B, θ_1^B) est parce que la loi de (M_1^B, θ_1^B) est bien connue et elle est présentée à la proposition 3.2.3. :

Proposition 3.2.3. (?) Pour $b \geq 0$ et $0 \leq u \leq 1$,

$$\mathbb{P}(M_1^B \in db, \theta_1^B \in du) = \frac{b}{\pi \sqrt{u^3(1-u)}} e^{-\frac{b^2}{2u}} db du.$$

Maintenant, avec le théorème 3.2.1. nous pouvons facilement trouver la forme explicite de $\mathbb{P}(Q_\alpha^B \in db, \eta_\alpha^B \in du)$ qui sera présentée dans le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.1. (?) Pour $0 < \alpha < 1$ et $0 < u < 1$,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B \in db, \eta_\alpha^B \in du) = \frac{|b|}{\pi \sqrt{u^3(1-u)}} e^{-\frac{b^2}{2u}} \cdot [\mathbb{I}_{(b>0, u \leq \alpha)} + \mathbb{I}_{(b<0, u \leq 1-\alpha)}] db du.$$

Ce résultat peut être facilement démontré en utilisant le théorème 3.2.1. et la proposition 3.3.3. Avec le théorème 3.2.1. il est aussi possible d'obtenir une autre représentation de la loi de $Q_\alpha^B(T)$.

Corollaire 3.2.2. (?) Pour $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B \in db) = \mathbb{P}(M_1^B \in db, 0 \leq \theta_1^B \leq \alpha) \mathbb{I}_{(b>0)} + \mathbb{P}(M_1^B \in d|b|, 0 \leq \theta_1^B \leq 1-\alpha) \mathbb{I}_{(b<0)}.$$

En intégrant la fonction de densité dans le corollaire 3.2.1. nous pouvons trouver la densité de η_α^B . Comme nous le verrons dans le prochain corollaire, cette densité est très proche d'une loi de l'arc-sinus, ce qui est assez étonnant.

Rappel 3.2.1. Si X suit une loi de l'arc-sinus alors, pour $0 < u < 1$,

$$\mathbb{P}(X \in du) = \frac{1}{\pi \sqrt{u(1-u)}} du.$$

Corollaire 3.2.3. (?) Pour $0 < \alpha < 1$ et $0 < u < 1$,

$$\mathbb{P}(\eta_\alpha^B \in du) = \frac{\mathbb{I}_{(u < \alpha)} + \mathbb{I}_{(u < 1-\alpha)}}{\pi \sqrt{u(1-u)}} du.$$

Nous savions déjà que la première (ou dernière) fois qu'un mouvement brownien atteint son maximum (M_T^B ou $Q_1^B(T)$) suit une loi de l'arc-sinus. Nous savons

maintenant que la première (ou dernière) fois qu'un mouvement brownien atteint n'importe quel α -quantile suit une loi de l'arc-sinus qui est légèrement modifiée.

En appliquant le théorème 1.1.1., nous avons que le corollaire 3.2.3. est équivalent à,

$$\mathbb{P}(\eta_\alpha^B \in du) = \mathbb{P}\left(A_1^{B,+0} \in du\right) \left[\mathbb{I}_{(u<\alpha)} + \mathbb{I}_{(u<1-\alpha)}\right],$$

et, en appliquant la proposition 3.2.1., nous avons que le corollaire 3.2.3. est aussi équivalent à,

$$\mathbb{P}(\eta_\alpha^B \in du) = \mathbb{P}(\theta_1^B \in du) \left[\mathbb{I}_{(u<\alpha)} + \mathbb{I}_{(u<1-\alpha)}\right].$$

Avec la densité de η_α^B nous pouvons facilement dériver la densité de ξ_α^B avec le lemme suivant.

Lemme 3.2.4. (?) Pour $0 < \alpha < 1$,

$$\xi_\alpha^B \stackrel{d}{=} 1 - \eta_\alpha^B$$

La démonstration peut être trouvée dans l'annexe C.1.3.

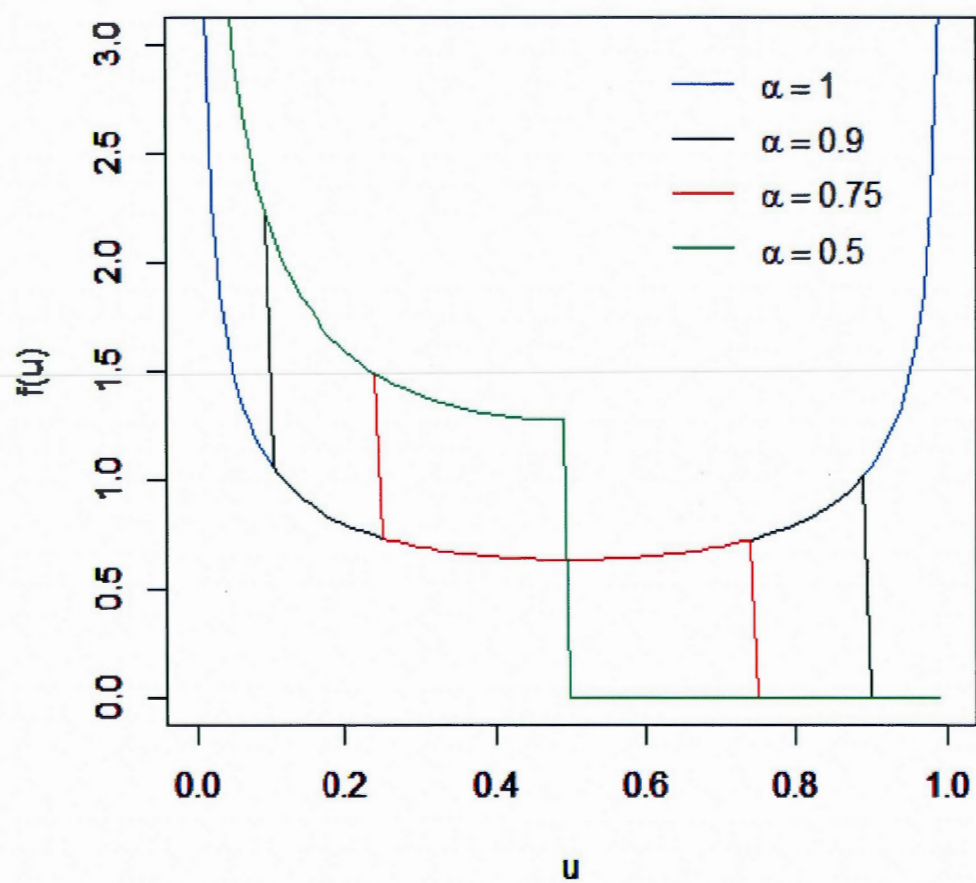
Remarque. (concernant la figure 3.7) On voit bien que lorsque $\alpha = 1$ la fonction de densité de η_α^B est la même que la fonction de densité d'une loi de l'arc-sinus c'est-à-dire pour $\alpha = 1$ la figure 3.7 est la même que la figure 1.2. Cela ne devrait pas être surprenant car lorsque $\alpha = 1$, $M_1^B = Q_1$ et donc $\eta_\alpha^B = \theta_1^B$. Lorsque u est plus grand que α , la fonction de densité de η_α^B est toujours égale à zéro. Cela ressort clairement de la définition de η_α^B . Disons que $\alpha = 0.5$, la première fois que le processus atteint la valeur à laquelle il sera inférieur 50% du temps ne peut pas être après 0.5.

3.2.2 La loi de $(\eta_\alpha^B, \xi_\alpha^B, Q_\alpha^B, B_1)$

Dans cette section nous allons présenter la dérivation de la loi conjointe de

$$(\eta_\alpha^B, \xi_\alpha^B, Q_\alpha^B, B_1),$$

Figure 3.9 La densité de η_α^B c.-à-d. $f(u) = \frac{\mathbb{I}_{(u < \alpha)} + \mathbb{I}_{(u < 1-\alpha)}}{\pi \sqrt{u(1-u)}}$



telle qu'obtenue par Dassios (2005). Nous allons commencer par présenter une définition afin de simplifier la notation. Ensuite nous allons présenter quelques lemmes et deux propositions qui sont essentielles pour démontrer le théorème principal de la section, la loi conjointe de $(\eta_\alpha^B, \xi_\alpha^B, Q_\alpha^B, B_1)$.

Définition 3.2.2. Pour $0 < v < t$ et $\alpha = \frac{v}{t}$,

$$g(b, a; v, t) db da := \mathbb{P} \left(Q_{\frac{v}{t}}^B(t) \in db, B_t \in da \right).$$

Maintenant, notre objectif est de calculer $g(0, 0; v, t)$, qui est la densité conjointe de $(Q_{\frac{v}{t}}^B(t), B_t)$ évaluée en $(0, 0)$, parce que $g(0, 0; v, t)$ est ce dont nous aurons besoin pour la dérivation de la loi conjointe de $(\eta_\alpha^B, \xi_\alpha^B, Q_\alpha^B, B_1)$. Nous allons commencer en calculant $g(b, a, v, t)$ et pour cela nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 3.2.5. (?) Pour $0 < v < t$ et $\alpha = \frac{v}{t}$,

$$g(b, a; v, t) \text{ est la fonction de densité de } (M_{\alpha t}^B + m_{(1-\alpha)t}^{B^*}, B_{\alpha t} + B_{(1-\alpha)t}^*),$$

$$\text{où } B_s^* = B_{\alpha t+s} - B_{\alpha t}.$$

Ce lemme peut être facilement démontré en appliquant le théorème 3.1.1 (l'identité de Dassios).

Lemme 3.2.6. (?) Pour $x, y \geq 0$,

$$\mathbb{P} (M_t^B \in dy, M_t^B - B_t \in dx) = \frac{2(y+x)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left(-\frac{(y+x)^2}{2t} \right) dy dx.$$

Démonstration. En utilisant le résultat bien connu suivant, voir ?,

$$\mathbb{P} (M_t^B \in db, B_t \in da) = \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left(-\frac{(2b-a)^2}{2t} \right) \mathbb{I}_{(b \geq 0, b \geq a)} db da,$$

avec le changement de variable $b = y$ et $a = y - x$ nous obtenons le résultat souhaité. □

Nous sommes maintenant prêts à calculer $g(0, 0, v, t)$.

Lemme 3.2.7. (?) Pour $0 < v < t$ et $\alpha = \frac{v}{t}$,

$$g(0, 0; v, t) = \frac{4\sqrt{v(t-v)}}{\pi t^2}.$$

Démonstration. Pour commencer, nous allons utiliser le lemme 3.2.5. et le fait que,

$$m_{(1-\alpha)t}^{B^*} \stackrel{p.s.}{=} -M_{(1-\alpha)t}^{-B^*} \stackrel{d}{=} -M_{(1-\alpha)t}^{B^*},$$

ce qui nous donne que,

$$\begin{aligned} g(0, 0; v, t) &\stackrel{\text{lem. 3.2.5.}}{=} \mathbb{P} \left(M_{\frac{v}{t}t}^B + m_{(1-\frac{v}{t})t}^{B^*} \in d(0), B_{\frac{v}{t}t} + B_{(1-\frac{v}{t})t}^* \in d(0) \right) \\ &= \mathbb{P} \left(M_{\frac{v}{t}t}^B - M_{(1-\frac{v}{t})t}^{-B^*} \in d(0), B_{\frac{v}{t}t} + B_{(1-\frac{v}{t})t}^* \in d(0) \right) \\ &= \mathbb{P} \left(M_{\frac{v}{t}t}^B - M_{(1-\frac{v}{t})t}^{B^*} \in d(0), B_{\frac{v}{t}t} - B_{(1-\frac{v}{t})t}^* \in d(0) \right) \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^b \mathbb{P} \left(M_{\frac{v}{t}t}^B \in db, B_{\frac{v}{t}t} \in da \right) \mathbb{P} \left(M_{(1-\frac{v}{t})t}^{B^*} \in db, B_{(1-\frac{v}{t})t}^* \in da \right). \end{aligned}$$

Avec le changement de variable $y = b$, $x = b - a$ et le lemme 3.2.6. nous avons que,

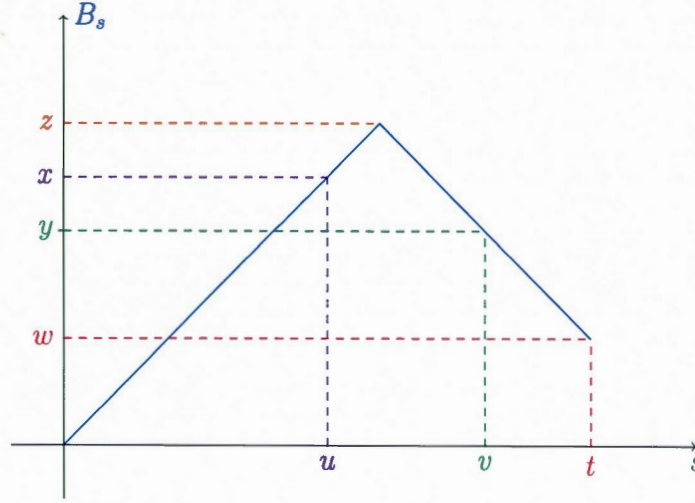
$$\begin{aligned} g(0, 0; v, t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P} \left(M_{\frac{v}{t}t}^B \in dy, M_{\frac{v}{t}t}^B - B_{\frac{v}{t}t} \in dx \right) \\ &\quad \cdot \mathbb{P} \left(M_{(1-\frac{v}{t})t}^{B^*} \in dy, M_{(1-\frac{v}{t})t}^{B^*} - B_{(1-\frac{v}{t})t}^* \in dx \right) \\ &\stackrel{\text{lem. 3.3.6}}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{2(y+x)}{\sqrt{2\pi v^3}} \exp \left(-\frac{(y+x)^2}{2v} \right) \frac{2(y+x)}{\sqrt{2\pi(t-v)^3}} \exp \left(-\frac{(y+x)^2}{2(t-v)} \right) dy dx. \end{aligned}$$

En résolvant cette intégrale, ce qui est long et fastidieux mais facile, nous obtenons le résultat souhaité :

$$g(0, 0; v, t) = \frac{4\sqrt{v(t-v)}}{\pi t^2}.$$

□

Figure 3.10 $\{\tau_x^B \in du, T_y^B \in dv, M_t^B \in dz, B_t \in dw\}$, $0 < x < z$, $w < y < z$ et $x > y$



Maintenant que nous avons calculé $g(0, 0; v, t)$, nous devons présenter deux autres propositions avant de présenter le théorème principal de cette section.

Définition 3.2.3. La dernière fois que B atteint $y \in \mathbb{R}$ dans l'intervalle $[0, t]$ est définie comme,

$$T_y^B(t) := \sup \{s \leq t : B_s = y\}.$$

Proposition 3.2.4. (?) Pour $0 < x < z$, $w < y < z$ et $u, v < t$, où $t > 0$ est fixé,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tau_x^B \in du, T_y^B(t) \in dv, M_t^B \in dz, B_t \in dw) \\ &= h(u; x, B)h(t-v; y-w, B)\mathbb{P}(M_{v-u}^B \in d(z-y), B_{v-u} \in d(x-y)). \end{aligned}$$

Une illustration de l'événement $\{\tau_x^B \in du, T_y^B(t) \in dv, M_t^B \in dz, B_t \in dw\}$ pour une trajectoire fixée est présentée dans la figure 3.8.

Remarque. Toutes les illustrations sont faites pour le cas où $x > y$. Le cas où $x < y$ peut être fait d'une manière similaire.

Démonstration. Pour $0 < x < z$, $w < y < z$, et un $t > 0$ fixé,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\tau_x^B \in du, T_y^B(t) \in dv, M_t^B \in dz, B_t \in dw) \\
& \equiv \mathbb{P}\left(\tau_x^B \in du, \sup\{s \leq t : B_s = y\} \in dv, \sup_{0 \leq s \leq t} B_s \in dz, B_t \in dw\right) \\
& = \int_0^t \mathbb{P}\left(\sup\{s \leq t : B_s = y\} \in dv, \sup_{0 \leq s \leq t} B_s \in dz, B_t \in dw \middle| \tau_x^B \in du\right) \mathbb{P}(\tau_x^B \in du) \\
& = \int_0^t \mathbb{P}\left(\sup\{s \leq t : B_s - x = y - x\} \in dv, \sup_{0 \leq s \leq t} B_s - x \in d(z - x), \right. \\
& \quad \left. B_t - x \in d(w - x) \middle| \tau_x^B \in du\right) \cdot \mathbb{P}(\tau_x^B \in du) \\
& = \int_0^t \mathbb{P}\left(\sup\{s \leq t : B_s - B_u = y - x\} \in dv, \sup_{0 \leq s \leq t} (B_s - B_u) \in d(z - x), \right. \\
& \quad \left. B_t - B_u \in d(w - x) \middle| \tau_x^B \in du\right) \cdot \mathbb{P}(\tau_x^B \in du) \\
& \stackrel{\text{Markov}}{=} \int_0^t \mathbb{P}\left(\sup\{s \leq t - u : B_s^* = y - x\} \in dv, \sup_{0 \leq s \leq t - u} B_s^* \in d(z - x), \right. \\
& \quad \left. B_{t-u}^* \in d(w - x) \middle| \tau_x^B \in du\right) \cdot \mathbb{P}(\tau_x^B \in du),
\end{aligned}$$

où $B^* = (B_t^*)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard qui est indépendant de \mathcal{F}_u^B . Maintenant, par définition, cette dernière intégrale est égale à,

$$\mathbb{P}(T_{y-x}^{B^*}(t-u) \in d(v-u), M_{t-u}^{B^*} \in d(z-x), B_{t-u}^* \in d(w-x), \tau_x^B \in du),$$

et avec l'indépendance de B et B^* nous avons que cette probabilité est égale à,

$$\mathbb{P}(T_{y-x}^{B^*}(t-u) \in d(v-u), M_{t-u}^{B^*} \in d(z-x), B_{t-u}^* \in d(w-x)) \mathbb{P}(\tau_x^B \in du).$$

donc,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\tau_x^B \in du, T_y^B(t) \in dv, M_t^B \in dz, B_t \in dw) \\
& = \mathbb{P}(T_{y-x}^{B^*}(t-u) \in d(v-u), M_{t-u}^{B^*} \in d(z-x), B_{t-u}^* \in d(w-x)) \mathbb{P}(\tau_x^B \in du).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Une illustration de l'événement

$$\{T_{y-x}^{B^*}(t-u) \in d(v-u), M_{t-u}^{B^*} \in d(z-x), B_{t-u}^* \in d(w-x)\}$$

pour une trajectoire fixée est présentée dans la figure 3.9. Notons que la figure 3.9 est la figure 3.8 "coupée" à $x = u$ avec la propriété de Markov.

Maintenant, par définition, (3.10) peut être écrite comme,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tau_x^B \in du, T_y^B(t) \in dv, M_t^B \in dz, B_t \in dw) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup\{s \leq t - u : B_s^* = y - x\} \in dv, \sup_{0 \leq s \leq t-u} B_s^* \in d(z - x), B_{t-u}^* \in d(w - x)\right) \\ & \cdot \mathbb{P}(\tau_x^B \in du). \end{aligned}$$

Avec la renversement de temps $B_s^* \stackrel{d}{=} B_{t-u-s}^* - B_{t-u}^*$ nous avons que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tau_x^B \in du, T_y^B(t) \in dv, M_t^B \in dz, B_t \in dw) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup\{s \leq t - u : B_{t-u-s}^* - B_{t-u}^* = y - x\} \in d(v - u), \right. \\ & \quad \left. \sup_{0 \leq s \leq t-u} (B_{t-u-s}^* - B_{t-u}^*) \in d(z - x), -B_{t-u}^* \in d(w - x)\right) \mathbb{P}(\tau_x^B \in du). \end{aligned}$$

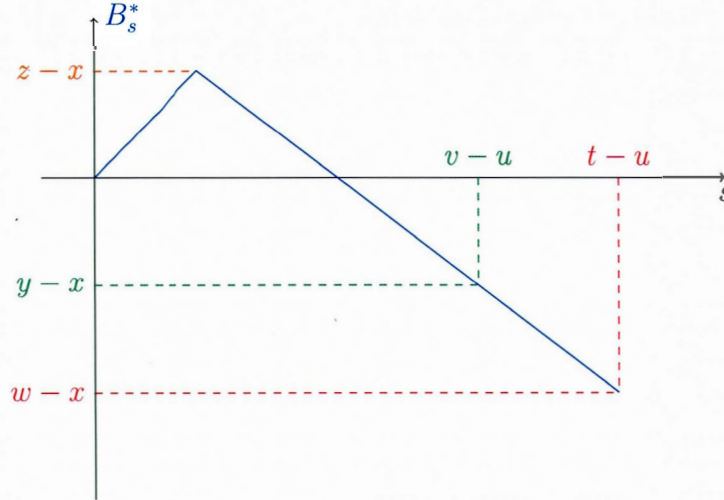
Nous savons que $-B_{t-u}^* \in d(w - x)$ alors nous pouvons réécrire cette dernière probabilité comme,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sup\{s \leq t - u : B_{t-u-s}^* = y - w\} \in d(v - u), \right. \\ & \quad \left. \sup_{0 \leq s \leq t-u} B_{t-u-s}^* \in d(z - w), -B_{t-u}^* \in d(w - x)\right) \mathbb{P}(\tau_x^B \in du) \\ &= \mathbb{P}\left(\inf\{s \geq 0 : B_s^* = y - w\} \in d(t - v), \right. \\ & \quad \left. \sup_{0 \leq s \leq t-u} B_s^* \in d(z - w), B_{t-u}^* \in d(x - w)\right) \mathbb{P}(\tau_x^B \in du) \\ &\equiv \mathbb{P}(\tau_{y-w}^{B^*} \in d(t - v), M_{t-u}^{B^*} \in d(z - w), B_{t-u}^* \in d(x - w)) \mathbb{P}(\tau_x^B \in du). \end{aligned}$$

Donc,

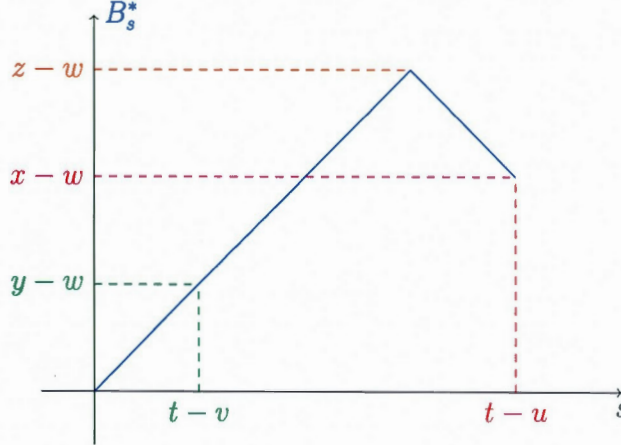
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tau_x^B \in du, T_y^B(t) \in dv, M_t^B \in dz, B_t \in dw) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{y-w}^{B^*} \in d(t - v), M_{t-u}^{B^*} \in d(z - w), B_{t-u}^* \in d(x - w)) \mathbb{P}(\tau_x^B \in du). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Figure 3.11 $\{T_{y-x}^{B^*} \in d(v-u), M_{t-u}^{B^*} \in d(z-x), B_{t-u}^* \in d(w-x)\}$, $0 < x < z$,
 $w < y < z$ et $x > y$



Une illustration de l'événement $\{\tau_{y-w}^{B^*} \in d(t-v), M_{t-u}^{B^*} \in d(z-w), B_{t-u}^* \in d(x-w)\}$ pour une trajectoire fixée est présentée dans la figure 3.10. Notons que la figure 3.10 est la figure 3.9 en partant du point $(t-u, w-x)$ avec le temps inversé. Pour terminer la preuve, nous allons suivre la même logique que nous venons tout

Figure 3.12 $\{\tau_{y-w}^{B^*} \in d(t-v), M_{t-u}^{B^*} \in d(z-w), B_{t-u}^* \in d(x-w)\}$, $0 < x < z$,
 $w < y < z$ et $x > y$



juste d'utiliser. Avec l'équation (3.11) et la propriété de Markov nous avons que,

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(\tau_x^B \in du, T_y^B(t) \in dv, M_t^B \in dz, B_t \in dw) \\
 &= \mathbb{P}(\tau_{y-w}^{B^*} \in d(t-v), M_{t-u}^{B^*} \in d(z-w), B_{t-u}^* \in d(x-w)) \mathbb{P}(\tau_x^B \in du) \\
 &= \int_0^{t-u} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t-u} B_s^* \in d(z-w), B_{t-u}^* \in d(x-w) \middle| \tau_{y-w}^{B^*} \in d(t-v)\right) \mathbb{P}(\tau_{y-w}^{B^*} \in d(t-v)) \\
 &\quad \cdot \mathbb{P}(\tau_x^B \in du) \\
 &= \int_0^{t-u} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t-u} B_s^* - B_{t-v}^* \in d(z-w-(y-w)), B_{t-u}^* - B_{t-v}^* \in d(x-w-(y-w)) \right. \\
 &\quad \left. \middle| \tau_{y-w}^{B^*} \in d(t-v)\right) \mathbb{P}(\tau_{y-w}^{B^*} \in d(t-v)) \cdot \mathbb{P}(\tau_x^B \in du) \\
 &\stackrel{\text{Markov}}{=} \int_0^{t-u} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq v-u} B_s^{**} \in d(z-y), B_{v-u}^{**} \in d(x-y) \middle| \tau_{y-w}^{B^*} \in d(t-v)\right) \mathbb{P}(\tau_{y-w}^{B^*} \in d(t-v)) \\
 &\quad \cdot \mathbb{P}(\tau_x^B \in du),
 \end{aligned}$$

où $B^{**} = (B_t^{**})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard qui est indépendant de $\mathcal{F}_{t-v}^{B^*}$ et \mathcal{F}_u^B . Maintenant, par définition, cette dernière intégrale est égale à,

$$\mathbb{P}(\tau_{y-w}^{B^*} \in d(t-v), M_{v-u}^{B^{**}} \in d(z-y), B_{v-u}^{**} \in d(x-y)) \mathbb{P}(\tau_x^B \in du),$$

et avec l'indépendance de B^* et B^{**} nous avons que cette probabilité est égale à,

$$\mathbb{P}(M_{v-u}^{B^{**}} \in d(z-y), B_{v-u}^{**} \in d(x-y)) \mathbb{P}(\tau_{y-w}^{B^*} \in d(t-v)) \mathbb{P}(\tau_x^B \in du),$$

ce qui nous donne le résultat souhaité. \square

Proposition 3.2.5. (?) Soit $(B_t^*)_{t \geq 0} := (B_{t+\alpha} - B_\alpha)_{t \geq 0}$, où $0 < \alpha < 1$,

$$(\eta_\alpha^B, \xi_\alpha^B, Q_\alpha^B, B_1) \stackrel{d}{=} (V_\alpha^B, U_\alpha^B, D_\alpha^B, B_\alpha + B_{1-\alpha}^*),$$

où $D_\alpha^B := M_\alpha^B + m_{(1-\alpha)}^{B^*}$,

$V_\alpha^B := \inf \{s \geq 0 : B_s = D_\alpha^B\} \mathbb{I}_{(D_\alpha^B \geq 0)} + \inf \{s \geq 0 : B_s^* = D_\alpha^B\} \mathbb{I}_{(D_\alpha^B \leq 0)}$, et

$U_\alpha^B := (1 - \alpha + \sup \{s \leq \alpha : B_s = D_\alpha^B - B_{1-\alpha}^*\}) \mathbb{I}_{(D_\alpha^B \geq B_\alpha + B_{1-\alpha}^*)}$
 $+ (\alpha + \sup \{s \leq 1 - \alpha : B_s^* = D_\alpha^B - B_\alpha\}) \mathbb{I}_{(D_\alpha^B \leq B_\alpha + B_{1-\alpha}^*)}$.

Nous sommes maintenant prêts à présenter le résultat principal de cette section c'est-à-dire la loi conjointe de $(\eta_\alpha^B, \xi_\alpha^B, Q_\alpha^B, B_1)$.

Théorème 3.2.2. (?) Pour $0 < \alpha < 1$, $0 < u < 1$ et $0 < v < 1$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\eta_\alpha^B \in du, \xi_\alpha^B \in dv, Q_\alpha^B \in db, B_1 \in da) = \\ & \frac{2|b||b-a|}{\pi^2(v-u)^2\sqrt{u^3(1-v)^3}} \exp\left(-\frac{b^2}{2u} - \frac{(b-a)^2}{2(1-v)}\right) dudvdbda \times \\ & \begin{cases} \sqrt{[v-u-(1-\alpha)](1-\alpha)} \cdot \mathbb{I}_{(u+(1-\alpha) < v < 1)}, & b > 0, b > a, \\ \sqrt{(\alpha-u)(v-\alpha)} \cdot \mathbb{I}_{(0 < u < \alpha < v < 1)}, & b > 0, b < a, \\ \sqrt{(v-u-\alpha)\alpha} \cdot \mathbb{I}_{(u+\alpha < v < 1)}, & b < 0, b > a, \\ \sqrt{(1-\alpha-u)[v-(1-\alpha)]} \cdot \mathbb{I}_{(0 < u < 1-\alpha < v < 1)}, & b < 0, b < a. \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration. Nous allons séparer cette preuve en quatre parties, une pour chaque région de la fonction.

(i) ($b > 0, b > a$)

Pour commencer nous allons appliquer la proposition 3.2.5. qui nous donne que,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\eta_\alpha^B \in du, \xi_\alpha^B \in dv, Q_\alpha^B \in db, B_1 \in da) \\ &= \mathbb{P}(V_\alpha^B \in du, U_\alpha^B \in dv, D_\alpha^B \in db, B_\alpha + B_{1-\alpha}^* \in da). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Par la définition de V_α^B et U_α^B nous avons que,

$$b > 0 \text{ implique que } V_\alpha^B = \inf \{s \geq 0 : B_s = D_\alpha^B\}, \quad (3.13)$$

et

$$b > a \text{ implique que } U_\alpha^B = (1 - \alpha + \sup \{s \leq \alpha : B_s = D_\alpha^B - B_{1-\alpha}^*\}). \quad (3.14)$$

En insérant (3.13) et (3.14) dans (3.12) nous avons que,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\eta_\alpha^B \in du, \xi_\alpha^B \in dv, Q_\alpha^B \in db, B_1 \in da) \\ &= \mathbb{P}\left(\inf \{s \geq 0 : B_s = D_\alpha^B\} \in du, [1 - \alpha + \sup \{s \leq \alpha : B_s = D_\alpha^B - B_{1-\alpha}^*\}] \in dv, \right. \\ & \quad \left. D_\alpha^B \in db, B_\alpha + B_{1-\alpha}^* \in da\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\inf \{s \geq 0 : B_s = b\} \in du, \sup \{s \leq \alpha : B_s = b - B_{1-\alpha}^*\} \in d(v - (1 - \alpha)), \right. \\ & \quad \left. D_\alpha^B \in db, B_\alpha \in d(a - B_{1-\alpha}^*)\right) \\ &\equiv \mathbb{P}\left(\tau_b^B \in du, T_{(b-B_{1-\alpha}^*)}(\alpha) \in d(v - (1 - \alpha)), M_\alpha^B \in d(b - m_{1-\alpha}^{B*}), B_\alpha \in d(a - B_{1-\alpha}^*)\right) \end{aligned}$$

Pour terminer la preuve de (i) nous allons utiliser la proposition 3.2.4. avec $x = b$,

$u = u, y = b - B_{1-\alpha}^*, t = \alpha, v = v - (1 - \alpha), z = b - m_{1-\alpha}^{B*}$, et $w = a - B_{1-\alpha}^*$, ce

qui nous donne le résultat souhaité :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\eta_\alpha^B \in du, \xi_\alpha^B \in dv, Q_\alpha^B \in db, B_1 \in da) \\
&= \mathbb{P}(\tau_b^B \in du) \mathbb{P}(\tau_{b-a}^B \in d(1-v)) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}(M_{(v-u)-(1-\alpha)}^B \in d(B_{1-\alpha}^* - m_{1-\alpha}^{B*}), B_{(v-u)-(1-\alpha)} \in d(B_{1-\alpha}^*)) \\
&= \mathbb{P}(\tau_b^B \in du) \mathbb{P}(\tau_{b-a}^B \in d(1-v)) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq (v-u)-(1-\alpha)} B_s + \inf_{0 \leq s \leq 1-\alpha} (B_s^* - B_{1-\alpha}^*) \in d(0), B_{(v-u)-(1-\alpha)} - B_{1-\alpha}^* \in d(0)\right).
\end{aligned}$$

Avec le fait que $B^* \stackrel{d}{=} -B^*$ cette dernière probabilité est égale à,

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(\tau_b^B \in du) \mathbb{P}(\tau_{b-a}^B \in d(1-v)) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq (v-u)-(1-\alpha)} B_s + \inf_{0 \leq s \leq 1-\alpha} (B_{1-\alpha}^* - B_s^*) \in d(0), B_{(v-u)-(1-\alpha)} + B_{1-\alpha}^* \in d(0)\right) \\
&= \mathbb{P}(\tau_b^B \in du) \mathbb{P}(\tau_{b-a}^B \in d(1-v)) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq (v-u)-(1-\alpha)} B_s + \inf_{0 \leq s \leq 1-\alpha} B_{1-\alpha-s} \in d(0), B_{(v-u)-(1-\alpha)} + B_{1-\alpha}^* \in d(0)\right) \\
&= \mathbb{P}(\tau_b^B \in du) \mathbb{P}(\tau_{b-a}^B \in d(1-v)) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}(M_{(v-u)-(1-\alpha)}^B + m_{1-\alpha}^{B*} \in d(0), B_{(v-u)-(1-\alpha)} + B_{1-\alpha}^* \in d(0)).
\end{aligned}$$

Maintenant avec le **lemme 3.2.5.** nous avons que,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\eta_\alpha^B \in du, \xi_\alpha^B \in dv, Q_\alpha^B \in db, B_1 \in da) \\
&= h(u; b, B) h(1-v; b-a, B) g(0, 0; (v-u) - (1-\alpha), (v-u)) \mathbb{I}_{(u>0, u+1-\alpha < v < 1)},
\end{aligned}$$

où les fonctions h et g sont données dans la proposition 1.2.1. et le lemme 3.2.7. respectivement.

(ii) ($b > 0, b < a$)

Pour commencer nous allons encore une fois utiliser la proposition 3.2.5., ce qui

nous donne que,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\eta_\alpha^B \in du, \xi_\alpha^B \in dv, Q_\alpha^B \in db, B_1 \in da) \\ &= \mathbb{P}(V_\alpha^B \in du, U_\alpha^B \in dv, D_\alpha^B \in db, B_\alpha + B_{1-\alpha}^* \in da). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Par la définition de V_α^B et U_α^B nous avons que,

$$b > 0 \text{ implique que } V_\alpha^B = \inf \{s \geq 0 : B_s = D_\alpha^B\}, \quad (3.16)$$

et

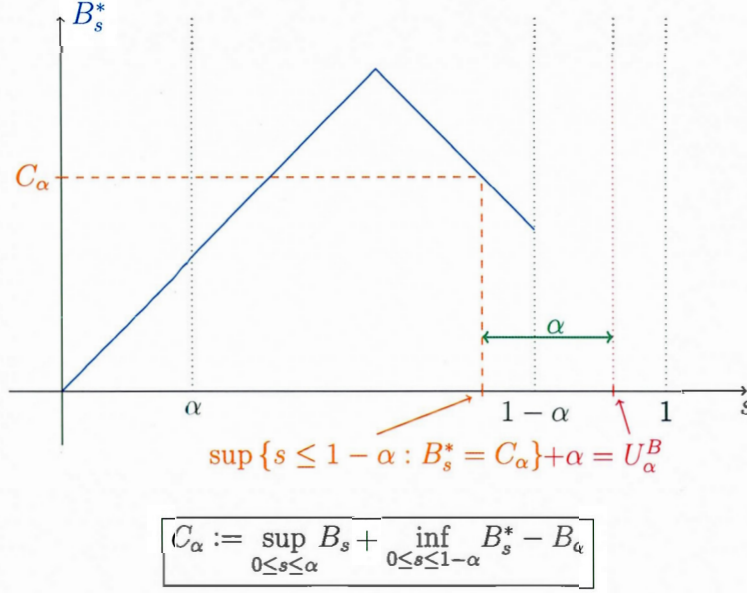
$$b < c \text{ implique que } U_\alpha^B = (\alpha + \sup \{s \leq 1 - \alpha : B_s^* = D_\alpha^B - B_\alpha\}).$$

Maintenant nous allons introduire le mouvement brownien avec temps inversé $\tilde{B}_s = B_{1-\alpha-s}^* - B_{1-\alpha}^*$. Cela nous donne que,

$$\begin{aligned} U_\alpha^B &= (\alpha + \sup \{s \leq 1 - \alpha : B_s^* = D_\alpha^B - B_\alpha\}) \\ &\equiv \left(\alpha + \sup \left\{ s \leq 1 - \alpha : B_s^* = \sup_{0 \leq s \leq \alpha} B_s + \inf_{0 \leq s \leq 1-\alpha} B_s^* - B_\alpha \right\} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$= 1 - \inf \left\{ s \geq 0 : \tilde{B}_s = \sup_{0 \leq s \leq \alpha} B_s + \inf_{0 \leq s \leq 1-\alpha} \tilde{B}_s - B_\alpha \right\}. \quad (3.18)$$

Voir la figure 3.11 pour une illustration de la transition de (3.17) à (3.18).

Figure 3.13 La transition de (3.17) à (3.18).

En insérant (3.18) et (3.16) dans (3.15) nous avons que,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\eta_\alpha^B \in du, \xi_\alpha^B \in dv, Q_\alpha^B \in db, B_1 \in da) \\
&= \mathbb{P}\left(\inf\{s \geq 0 : B_s = D_\alpha^B\} \in du, \right. \\
&\quad \left. \inf\left\{s \geq 0 : \tilde{B}_s = \sup_{0 \leq s \leq \alpha} B_s + \inf_{0 \leq s \leq 1-\alpha} \tilde{B}_s - B_\alpha\right\} \in d(1-v), \right. \\
&\quad \left. \sup_{0 \leq s \leq \alpha} B_s + \inf_{0 \leq s \leq 1-\alpha} B_s^* \in db, B_\alpha + B_{1-\alpha}^* \in da\right), \\
&= \mathbb{P}\left(\inf\{s \geq 0 : B_s = D_\alpha^B\} \in du, \right. \\
&\quad \left. \inf\left\{s \geq 0 : \tilde{B}_s = \sup_{0 \leq s \leq \alpha} B_s + \inf_{0 \leq s \leq 1-\alpha} \tilde{B}_s - B_\alpha\right\} \in d(1-v), \right. \\
&\quad \left. \sup_{0 \leq s \leq \alpha} B_s + \inf_{0 \leq s \leq 1-\alpha} (\tilde{B}_s - \tilde{B}_{1-\alpha}) \in db, B_\alpha - \tilde{B}_{1-\alpha} \in da\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\tau_b^B \in du, \inf\{s \geq 0 : \tilde{B}_s = b - a\} \in d(1-v), \right. \\
&\quad \left. \sup_{0 \leq s \leq \alpha} B_s + \inf_{0 \leq s \leq 1-\alpha} (\tilde{B}_s - \tilde{B}_{1-\alpha}) \in db, B_\alpha - \tilde{B}_{1-\alpha} \in da\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\tau_b^B \in du, \tau_{b-a}^{\tilde{B}} \in d(1-v), M_\alpha^B + m_{1-\alpha}^{\tilde{B}} - \tilde{B}_{1-\alpha} \in db, B_\alpha - \tilde{B}_{1-\alpha} \in da\right)
\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve nous allons utiliser la propriété de Markov forte comme dans la preuve de la proposition 3.2.5.,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\eta_\alpha^B \in du, \xi_\alpha^B \in dv, Q_\alpha^B \in db, B_1 \in da) \\
&= \mathbb{P}(\tau_b^B \in du, \tau_{b-a}^{\tilde{B}} \in d(1-v), M_\alpha^B + m_{1-\alpha}^{\tilde{B}} - \tilde{B}_{1-\alpha} \in db, B_\alpha - \tilde{B}_{1-\alpha} \in da) \\
&= \mathbb{P}(\tau_b^B \in du) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}(\tau_{b-a}^{\tilde{B}} \in d(1-v), M_{\alpha-u}^B + m_{1-\alpha}^{\tilde{B}} - \tilde{B}_{1-\alpha} \in d(0), B_{\alpha-u} - \tilde{B}_{1-\alpha} \in d(a-b)) \\
&= \mathbb{P}(\tau_b^B \in du) \mathbb{P}(\tau_{b-a}^{\tilde{B}} \in d(1-v)) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}(M_{\alpha-u}^B + m_{v-\alpha}^{\tilde{B}} - \tilde{B}_{v-\alpha} \in d(0), B_{\alpha-u} - \tilde{B}_{v-\alpha} \in d(0)) \\
&= \mathbb{P}(\tau_b^B \in du) \mathbb{P}(\tau_{b-a}^{\tilde{B}} \in d(1-v)) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}\left(M_{\alpha-u}^B + \inf_{0 \leq s \leq v-\alpha} \tilde{B}_s - \tilde{B}_{v-\alpha} \in d(0), B_{\alpha-u} - \tilde{B}_{v-\alpha} \in d(0)\right) \\
&= \mathbb{P}(\tau_b^B \in du) \mathbb{P}(\tau_{b-a}^{\tilde{B}} \in d(1-v)) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}\left(M_{\alpha-u}^B + \inf_{0 \leq s \leq v-\alpha} (\tilde{B}_{v-\alpha} - \tilde{B}_s) \in d(0), B_{\alpha-u} + \tilde{B}_{v-\alpha} \in d(0)\right) \\
&= \mathbb{P}(\tau_b^B \in du) \mathbb{P}(\tau_{b-a}^{\tilde{B}} \in d(1-v)) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}\left(M_{\alpha-u}^B + \inf_{0 \leq s \leq v-\alpha} \tilde{B}_{(v-\alpha)-s} \in d(0), B_{\alpha-u} + \tilde{B}_{v-\alpha} \in d(0)\right) \\
&= \mathbb{P}(\tau_b^B \in du) \mathbb{P}(\tau_{b-a}^{\tilde{B}} \in d(1-v)) \mathbb{P}(M_{\alpha-u}^B + m_{v-\alpha}^{\tilde{B}} \in d(0), B_{\alpha-u} + \tilde{B}_{v-\alpha} \in d(0)) \\
&= h(u; b, B)h(1-v; b-a, B)g(0, 0; \alpha-u, v-u).
\end{aligned}$$

□

(iii) ($b < 0, b > a$)

Pour cette région de la fonction, nous allons appliquer les lemmes 3.2.2. et 3.2.3.

En commençant avec le mouvement brownien $-B$ nous avons que,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\eta_{\alpha}^{-B} \in du, \xi_{\alpha}^{-B} \in dv, Q_{\alpha}^{-B} \in db, -B_1 \in da \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\eta_{1-\alpha}^B \in du, \xi_{1-\alpha}^B \in dv, -Q_{1-\alpha}^B \in db, -B_1 \in da \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\eta_{\alpha'}^B \in du, \xi_{\alpha'}^B \in dv, Q_{\alpha'}^B \in d\tilde{b}, B_1 \in d\tilde{a} \right), \end{aligned}$$

où $\tilde{b} = -b$, $\tilde{a} = -a$ et $\alpha' = 1 - \alpha$.

Puisque $b < 0$ et $b > a$, ce qui nous donne que $\tilde{b} > 0$ et $\tilde{b} < \tilde{a}$, la troisième région est la même que la première région avec \tilde{a} au lieu de a , \tilde{b} au lieu de b , et α' au lieu de α .

(iv) ($b < 0, b < a$)

En suivant la même logique que dans (iii), le résultat souhaité est facilement obtenu.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS DES α -QUANTILES

Dans ce chapitre, nous discuterons de certaines applications des α -quantiles. Nous allons commencer par une généralisation des options lookback. Une option lookback est une option avec un paiement à l'échéance qui est une fonction de la valeur maximale (ou minimale) du prix de l'action au cours de la durée du contrat. Il existe deux versions typiques d'options lookback, une avec un prix d'exercice fixé et l'autre avec un prix d'exercice flottant. Les options lookback avec prix d'exercice flottant paient, à l'échéance, la différence entre le prix maximal de l'actif sous-jacent pendant la durée du contrat et le prix final de l'actif sous-jacent. Les options lookback avec prix d'exercice fixé paient, à l'échéance, la différence entre le prix maximal (ou minimal) de l'actif sous-jacent pendant la durée du contrat et une valeur fixée prédéterminée, appelée le prix d'exercice, si la différence est positive. Dans cette section, nous allons nous concentrer sur les options lookback avec prix d'exercice fixé. Une des raisons d'acheter une option lookback avec prix d'exercice fixé est de parier sur une volatilité forte. Le prix final de l'action n'est pas important, tant que l'actif sous-jacent atteint une valeur au-dessus du prix d'exercice à n'importe quel moment, un paiement sera effectué. Le problème est que ce type d'option peut être très coûteux. Il y a eu beaucoup de généralisations des options lookback avec prix d'exercice fixé afin d'essayer de réduire le prix de celles-ci afin qu'elles soient plus attrayantes pour les investisseurs. Quelques

exemples d'options lookback qu'on retrouve dans la littérature, sont les suivantes :

1. Les options look-barrière de (?) qui divisent le temps de la maturité en deux intervalles $[T_0, T_1]$ & $[T_1, T_2]$ et introduisent une barrière dans le premier intervalle.
2. Les options lookback partielles de (?) qui utilise le prix de l'actif sous-jacent maximal sur un ou plusieurs sous-intervalles de la durée jusqu'à l'échéance.
3. Les options lookback proportionnelles de (?) qui utilisent une proportion du prix maximum de l'actif sous-jacent pendant toute la durée du contrat.

Dans cette section, nous allons présenter les résultats de Dassios (1995) et ? qui montrent une autre façon de généraliser les options lookback avec un prix d'exercice fixé. Cette généralisation consistera à utiliser un α -quantile plutôt que le maximum du prix de l'action sur la durée du contrat. Comme plusieurs généralisations cela va aussi baisser le prix de l'option.

Dans la deuxième section, nous allons discuter de la simulation des options α -lookback. Avec l'identité de Dassios nous pouvons simuler les α -quantiles assez facilement puisque les fonctions de répartition de M_t^W et m_t^W sont bien connues. Nous allons utiliser la technique d'inversion de la fonction de répartition par opposition à la simulation des trajectoires entières, qui peuvent causer des résultats erronés ou du moins prendre beaucoup de temps de calcul. Nous allons également aborder une autre application intéressante des options α -lookback : le fait qu'elles peuvent être utilisées pour approximer des options asiatiques. Cela peut être très utile, car trouver le prix des options asiatiques est très difficile d'un point de vue calculatoire. Nous allons montrer que les options médianes (une option α -lookback avec $\alpha = 0.5$) peuvent être utilisées pour se rapprocher des options asiatiques.

4.1 Les options α -lookback

Dans cette section, nous allons travailler dans le modèle de Black-Scholes-Merton. Nous allons présenter deux définitions et ensuite calculer le prix d'une option α -lookback.

Définition 4.1.1. *Une option lookback avec prix d'exercice fixé est une option avec paiement à l'échéance, $T > 0$, donnée par,*

$$(S_0 e^{M_T^Z} - K)^+,$$

où $Z_t = \mu t + \sigma B_t$ avec $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$, et $K, S_0 > 0$.

Définition 4.1.2. *Une option α -lookback est une option avec paiement à l'échéance, $T > 0$, donnée par,*

$$(S_0 e^{Q_\alpha^Z(T)} - K)^+,$$

où $Z_t = \mu t + \sigma B_t$ avec $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, et $K, S_0 > 0$.

La seule différence dans la deuxième définition est qu'on remplace le maximum par l' α -quantile.

Remarque. *Il est facile de vérifier qu'une option α -lookback est toujours moins chère qu'une option lookback avec prix d'exercice fixé car $Q_\alpha^Z(T) \leq M_T^Z$ p.s. et clairement $\lim_{\alpha \rightarrow 1} (S_0 e^{Q_\alpha^Z(T)} - K)^+ = (S_0 e^{M_T^Z} - K)^+$.*

Avant de présenter le calcul du prix d'une option α -lookback voici un rappel dont nous aurons besoin dans le calcul.

Rappel 4.1.1. *Soit W un mouvement brownien. Pour $0 < \alpha < 1$ et $x \in \mathbb{R}$,*

$$\{Q_\alpha^W(T) > x\} = \{A_T^{W, -, x} < \alpha T\}.$$

Le prix d'une option α -lookback

Pour trouver le prix d'une option α -lookback nous utiliserons la technique standard, de trouver l'espérance actualisée du paiement à l'échéance sous la mesure martingale équivalente. Le prix au temps $t \in [0, T]$ est donné par,

$$\pi_\alpha(S_t, t; T, K) := e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[(S_0 e^{Q_\alpha^{\sigma W^{BSM}}(T)} - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t^{W^{BSM}} \right].$$

Afin de simplifier la notation, nous allons définir $\tilde{W} = (\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$ comme $W^{BSM} = (W_t^{BSM})_{t \geq 0}$ où W^{BSM} est un mouvement brownien avec dérive $\nu = \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$, $\sigma > 0$ et $r \geq 0$. Cela nous donne que,

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(S_t, t; T, K) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[(S_0 e^{Q_\alpha^{\sigma \tilde{W}}(T)} - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t^{\tilde{W}} \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \mathbb{P} \left((S_0 e^{Q_\alpha^{\sigma \tilde{W}}(T)} - K)^+ > u \middle| \mathcal{F}_t^{\tilde{W}} \right) du \\ &\stackrel{(z=u+K)}{=} e^{-r(T-t)} \int_K^\infty \mathbb{P} \left(S_0 e^{Q_\alpha^{\sigma \tilde{W}}(T)} > z \middle| \mathcal{F}_t^{\tilde{W}} \right) dz \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty \mathbb{P} \left(Q_\alpha^{\sigma \tilde{W}}(T) > \ln \left(\frac{z}{S_0} \right) \middle| \mathcal{F}_t^{\tilde{W}} \right) dz. \end{aligned}$$

Pour simplifier la notation, encore une fois, nous allons définir $\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{z}{S_0} \right)$ comme $l_0(z)$. Maintenant avec rappel 4.1.1 nous avons que,

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(S_t, t; T, K) &= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty \mathbb{P} \left(A_T^{\tilde{W}, -, l_0(z)} < \alpha T \middle| \mathcal{F}_t^{\tilde{W}} \right) dz \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty \mathbb{P} \left(\int_t^T \mathbb{I}_{(\tilde{W}_s \leq l_0(z))} ds < \alpha T - A_t^{\tilde{W}, -, l_0(z)} \middle| \mathcal{F}_t^{\tilde{W}} \right) dz. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pour l'instant nous allons nous concentrer uniquement sur l'intégrand. Avec la propriété de Markov nous avons que,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left(\int_t^T \mathbb{I}_{(\tilde{W}_s \leq l_0(z))} ds < \alpha T - A_t^{\tilde{W}, -, l_0(z)} \middle| \mathcal{F}_t^{\tilde{W}} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\int_0^{T-t} \mathbb{I}_{(W_s^* \leq l_0(z) - W_t)} ds < \alpha T - A_t^{\tilde{W}, -, l_0(z)} \middle| \mathcal{F}_t^{\tilde{W}} \right), \end{aligned}$$

où $W^* = (W_s^*)_{s \geq 0}$ est un mouvement brownien avec dérive $\nu = \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$ qui est indépendante de $\mathcal{F}_t^{\tilde{W}}$. Maintenant avec le fait que $\tilde{W}_t = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right)$ et $l_0(z) \equiv \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{z}{S_0} \right)$ nous avons que,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\int_0^{T-t} \mathbb{I}_{(W_s^* \leq l_0(z) - W_t)} ds < \alpha T - A_t^{\tilde{W}, -, l_0(z)} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\int_0^{T-t} \mathbb{I}_{(W_s^* \leq \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{z}{S_t} \right))} ds < \alpha T - A_t^{\tilde{W}, -, l_0(z)} \middle| \mathcal{F}_t^{\tilde{W}} \right) \\ &\equiv \mathbb{P} \left(A_{T-t}^{W^*, -, l_t(z)} < \alpha T - A_t^{\tilde{W}, -, l_0(z)} \middle| \mathcal{F}_t^{\tilde{W}} \right), \end{aligned}$$

où $l_t(z) := \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{z}{S_t} \right)$. En laissant tomber le $\mathcal{F}_t^{\tilde{W}}$, nous avons que cette dernière probabilité est égale à,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(A_{T-t}^{W^*, -, l_t(z)} < \alpha T - A_t^{\tilde{W}, -, l_0(z)} \right) \mathbb{I}_{(0 < \alpha T - A_t^{\tilde{W}, -, l_0(z)} < T-t)} \\ &+ \mathbb{I}_{(T-t \leq \alpha T - A_t^{\tilde{W}, -, l_0(z)})}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Maintenant en insérant (4.2) dans (4.1) nous avons que,

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(S_t, t; T, K) &= \\ & e^{-r(T-t)} \int_K^\infty \mathbb{P} \left(A_{T-t}^{W^*, -, l_t(z)} < \alpha T - A_t^{\tilde{W}, -, l_0(z)} \right) \mathbb{I}_{(0 < \alpha T - A_t^{\tilde{W}, -, l_0(z)} \leq T-t)} dz \\ &+ e^{-r(T-t)} \int_K^\infty \mathbb{I}_{(T-t < \alpha T - A_t^{\tilde{W}, -, l_0(z)})} dz. \end{aligned}$$

Pour $t < \min\{\alpha T, (1 - \alpha)T\}$ nous avons que,

$$\pi_\alpha(S_t, t; T, K) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty \mathbb{P} \left(A_{T-t}^{W^*, -, l_t(z)} < \alpha T - A_t^{\tilde{W}, -, l_0(z)} \right) dz, \quad (4.3)$$

et pour $t = 0$ nous avons que,

$$\pi_\alpha(S_0, 0; T, K) = e^{-rT} \int_K^\infty \mathbb{P} \left(A_T^{W^*, -, l_0(z)} < \alpha T \right) dz. \quad (4.4)$$

Dans Dassios (1995) ce prix est exprimé en termes de la densité de $Q_\alpha^{W^*}(T)$. Nous avons laissé le prix en termes de $A_T^{W^*, -, k}$ parce que, avec les formules fermées de ?, nous pouvons exprimer le prix initial d'une option α -lookback sans intégrale. Cela sera fait dans la sous-section suivante.

La forme fermée du prix initial d'une option α -lookback

En appliquant les résultats de la section 1.2.1 nous avons que,

- Région $i \{S_0 > K\}$

$$\begin{aligned}
 \pi_{\alpha}^i(S_0, 0; T, K) &= e^{-rT} \int_K^{\infty} \mathbb{P} \left(A_T^{W^*, -, l_0(z)} < \alpha T \right) dz \\
 &\equiv e^{-rT} \int_K^{\infty} \mathbb{P} \left(A_T^{W^*, -, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{z}{S_0} \right)} < \alpha T \right) dz \\
 &= e^{-rT} \int_K^{\infty} \mathbb{P} \left(T - A_T^{W^*, +, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{z}{S_0} \right)} < \alpha T \right) dz \\
 &= e^{-rT} \int_K^{S_0} 1 - \mathbb{P} \left(A_T^{W^*, +, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{z}{S_0} \right)} < T - \alpha T \right) dz \\
 &\quad + e^{-rT} \int_{S_0}^{\infty} 1 - \mathbb{P} \left(A_T^{W^*, +, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{z}{S_0} \right)} < T - \alpha T \right) dz \\
 &= e^{-rT} \int_K^{S_0} 1 - F_A^+ \left(T(1 - \alpha), T, \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{z}{S_0} \right), W^* \right) dz \\
 &\quad + e^{-rT} \int_{S_0}^{\infty} F_A^+ \left(\alpha T, T, -\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{z}{S_0} \right), X^* \right) dz \\
 &= e^{-rt}(S_0 - K) - S_0 \sigma e^{-rT} \int_{\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right)}^0 F_A^+ (T(1 - \alpha), T, y, W^*) e^{y\sigma} dy \\
 &\quad + S_0 \sigma e^{-rT} \int_{-\infty}^0 F_A^+ (\alpha T, T, y, X^*) e^{-y\sigma} dy \\
 &= e^{-rt}(S_0 - K) - S_0 \sigma e^{-rT} \int_{-\infty}^0 F_A^+ (T(1 - \alpha), T, y, W^*) e^{y\sigma} dy \\
 &\quad + S_0 \sigma e^{-rT} \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{S_0} \right)} F_A^+ (T(1 - \alpha), T, y, W^*) e^{y\sigma} dy \\
 &\quad + S_0 \sigma e^{-rT} \int_{-\infty}^0 F_A^+ (\alpha T, T, y, X^*) e^{-y\sigma} dy.
 \end{aligned}$$

où X^* est un MBA avec dérive $-\frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$.

La forme fermée de l'intégrale,

$$\int_{-\infty}^c F_A^+(t, T, y, W^*) e^{y\sigma} dy, \quad c \leq 0,$$

est donnée dans ? à la page 54.

Donc, la forme fermée du prix initial d'une option α -quantile dans la région i est,

$$\begin{aligned}\pi_{\alpha}^i(S_0, 0; T, K) &= e^{-rt}(S_0 - K) - S_0\sigma e^{-rT} \int_{-\infty}^0 F_A^+(T(1-\alpha), T, y, W^*) e^{y\sigma} dy \\ &\quad + S_0\sigma e^{-rT} \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)} F_A^+(T(1-\alpha), T, y, W^*) e^{y\sigma} dy \\ &\quad + S_0\sigma e^{-rT} \int_{-\infty}^0 F_A^+(\alpha T, T, y, X^*) e^{-y\sigma} dy.\end{aligned}\quad (4.5)$$

• Région ii $\{S_0 \leq K\}$

$$\begin{aligned}\pi_{\alpha}^{ii}(S_0, 0; T, K) &= e^{-rT} \int_K^{\infty} \mathbb{P}\left(A_T^{W^*, -, l_0(z)} < \alpha T\right) dz \\ &\equiv e^{-rT} \int_K^{\infty} \mathbb{P}\left(A_T^{W^*, -, \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{z}{S_0}\right)} < \alpha T\right) dz \\ &= e^{-rT} \int_K^{\infty} \mathbb{P}\left(T - A_T^{W^*, +, \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{z}{S_0}\right)} < \alpha T\right) dz \\ &= e^{-rT} \int_K^{\infty} 1 - \mathbb{P}\left(A_T^{W^*, +, \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{z}{S_0}\right)} < T - \alpha T\right) dz \\ &= e^{-rT} \int_K^{\infty} F_A^+\left(\alpha T, T, -\frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{z}{S_0}\right), X^*\right) dz \\ &= S_0\sigma e^{-rT} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)} F_A^+(\alpha T, T, y, X^*) e^{-y\sigma} dy.\end{aligned}$$

où X^* est un MBA avec dérive $-\frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$.

Donc, la forme fermée du prix initial d'une option α -quantile dans la région ii est,

$$\pi_{\alpha}^{ii}(S_0, 0; T, K) = S_0\sigma e^{-rT} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)} F_A^+(\alpha T, T, y, X^*) e^{-y\sigma} dy. \quad (4.6)$$

Remarque. La raison pour laquelle nous avons besoin de diviser $\pi_{\alpha}(S_0, 0, T, K)$ en deux régions c'est parce que $\mathbb{P}\left(A_T^{W^*, +, k} \leq t\right)$ est une fonction différente pour $k > 0$ et $k < 0$. Pour $\pi_{\alpha}(S_0, 0; T, K)$, si $z < S_0$ alors $\frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{z}{S_0}\right) < 0$, et si $z > S_0$ alors $\frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{z}{S_0}\right) > 0$.

Avec la formule explicite nous pouvons facilement calculer le prix initial mais si $t > 0$ nous aurons encore des difficultés de calcul, car nous devons avoir tous les temps d'occupation, $\left\{ A_t^{W, -, \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{z}{S_0}\right)} : z \geq K \right\}$, jusqu'au temps $t > 0$. Pour contourner ces difficultés de calcul, il est possible d'utiliser des méthodes de Monte Carlo, ceci sera discuté dans la section suivante.

4.2 Simulation des options α -lookback

Étant donné la complexité du calcul de $\pi_\alpha(S_0, t, T, K)$ et le fait que l'identité de Dassios nous permet de simuler des α -quantiles pour les mouvements browniens avec peu d'effort, il peut être utile d'appliquer des méthodes numériques Monte Carlo pour estimer $\pi_\alpha(S_0, t, T, K)$. Dans cette section, nous allons commencer par décrire la procédure de Ballotta et Kyprianou (2001) pour simuler des α -lookback en utilisant l'identité de Dassios. Nous allons ensuite discuter brièvement une technique de réduction de variance et les options α -lookback comme un rapprochement des options asiatiques. Avec l'identité de Dassios, voir chapitre 3, puisque les fonctions de répartition de M_t^W et m_t^{W*} sont bien connues, nous pouvons simuler des α -quantiles sans simuler toute une trajectoire, ce qui peut mener à des résultats erronés ou du moins prendre beaucoup plus de temps de calcul.

Les fonctions de répartition de M_t^W et m_t^{W*} sont les suivantes :

Proposition 4.2.1. (?) *La fonction de répartition de M_t^W est donnée par,*

$$\mathbb{P}(M_t^W \leq y) = \Phi\left(\frac{y - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y} \Phi\left(\frac{-y - \mu t}{\sqrt{t}}\right),$$

où $y \geq 0$.

La fonction de répartition de m_t^{W} est donnée par,*

$$\mathbb{P}(m_t^{W*} \leq y) = \Phi\left(\frac{y - \mu t}{\sqrt{t}}\right) + e^{2\mu y} \Phi\left(\frac{y + \mu t}{\sqrt{t}}\right),$$

où $y \leq 0$.

Maintenant nous avons tout ce qu'il faut pour simuler le prix des options α -quantiles. Voici la procédure :

Étape 1 :

Générer un échantillon de n observations indépendantes de $M_{\alpha T}^W$ et $m_{(1-\alpha)T}^{W*}$ en inversant les fonctions de distribution.

Étape 2 :

Définir $Q_j, j = 1, \dots, n$ comme la somme de la $j^{\text{ième}}$ observation de la distribution de m_t^W et M_t^W .

Étape 3 :

Définir P_j comme $(S_0 e^{Q_j} - K)^+$ pour $j = 1, \dots, n$ comme étant le $j^{\text{ième}}$ paiement simulé.

Étape 4 :

Définir $\hat{\pi}$ comme $e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_j$ et $\hat{\pi}$ est l'approximation numérique de $\pi_\alpha(S_0, 0; T, K)$.

Remarque. (concernant la figure 4.1) Nous avons simulé 100 prix initiaux d'options α -lookback en utilisant l'identité de Dassios (les étapes ci-dessus) et 100 prix avec une simulation naïve de toute la trajectoire. Nous pouvons voir de la figure 4.1 que l'approche naïve donne des résultats qui sont similaires à ceux obtenus en utilisant l'identité de Dassios. Cependant l'approche naïve prend beaucoup plus de temps (heures) par opposition aux secondes lors de l'utilisation de l'identité de Dassios.

Remarque. (concernant les figures 4.2 et 4.3) Nous pouvons voir de la figure 4.2 que lorsque α augmente le prix initial de l'option α -lookback converge vers le prix de l'option lookback. Nous pouvons également visualiser ce qui a été affirmé

Figure 4.1 La différence entre les prix simulés des options α -lookback en utilisant l'identité de Dassios et une approche naïve ($\alpha = .8$, $\sigma = .2$, $r = .01$, $T = 1$, $S_0 = 10$, $K = 11$).

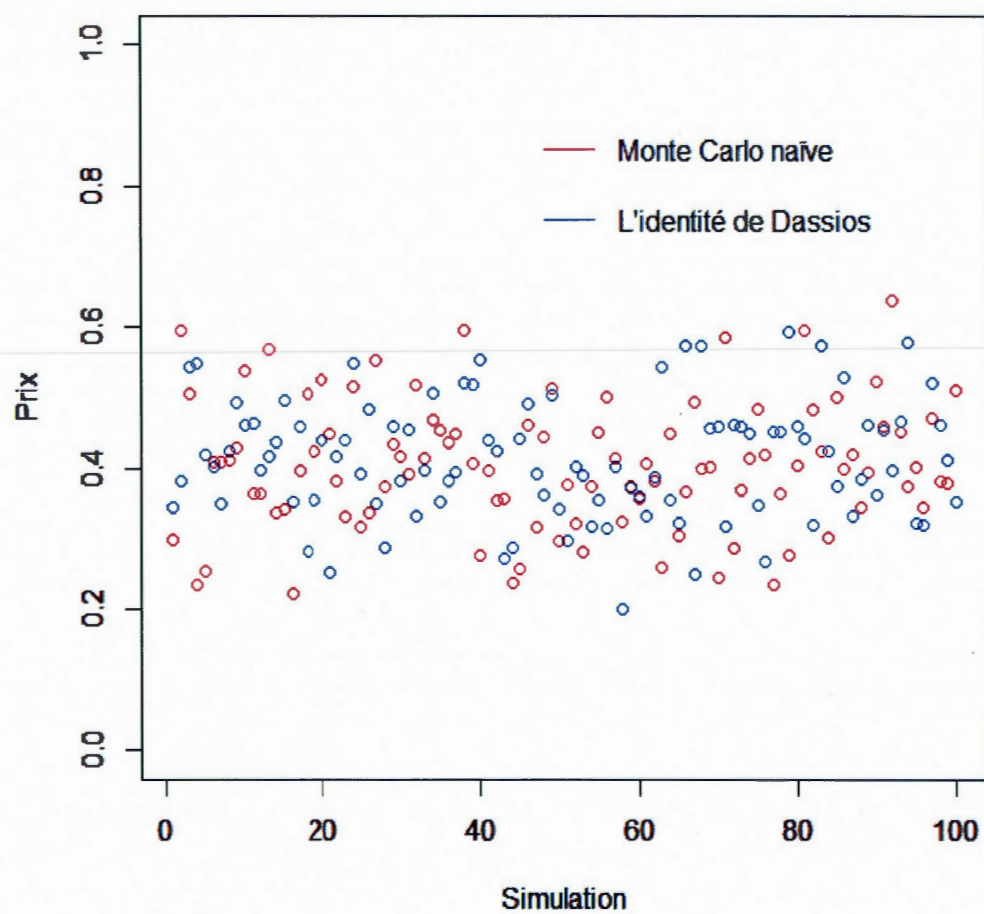


Figure 4.2 Le prix initial d'une option lookback comparé avec les prix simulés des options α -lookback avec plusieurs α en utilisant l'identité de Dassios ($\sigma = .2$, $r = .01$, $T = 1$, $K = 11$).

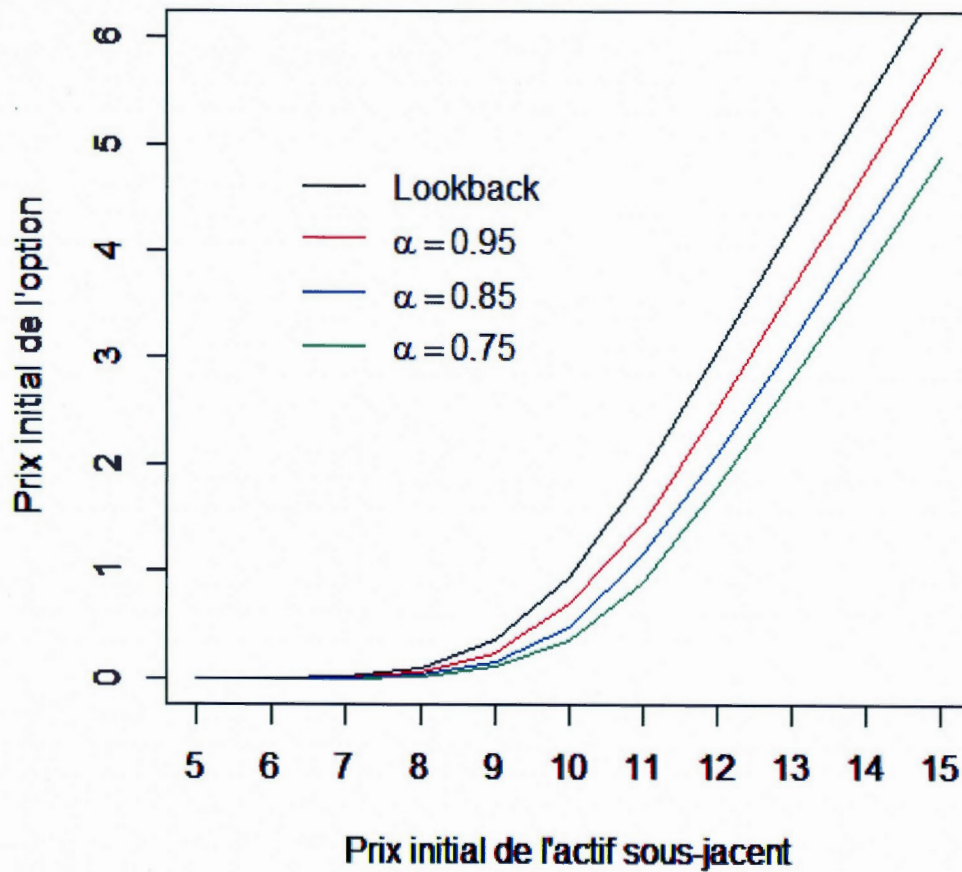
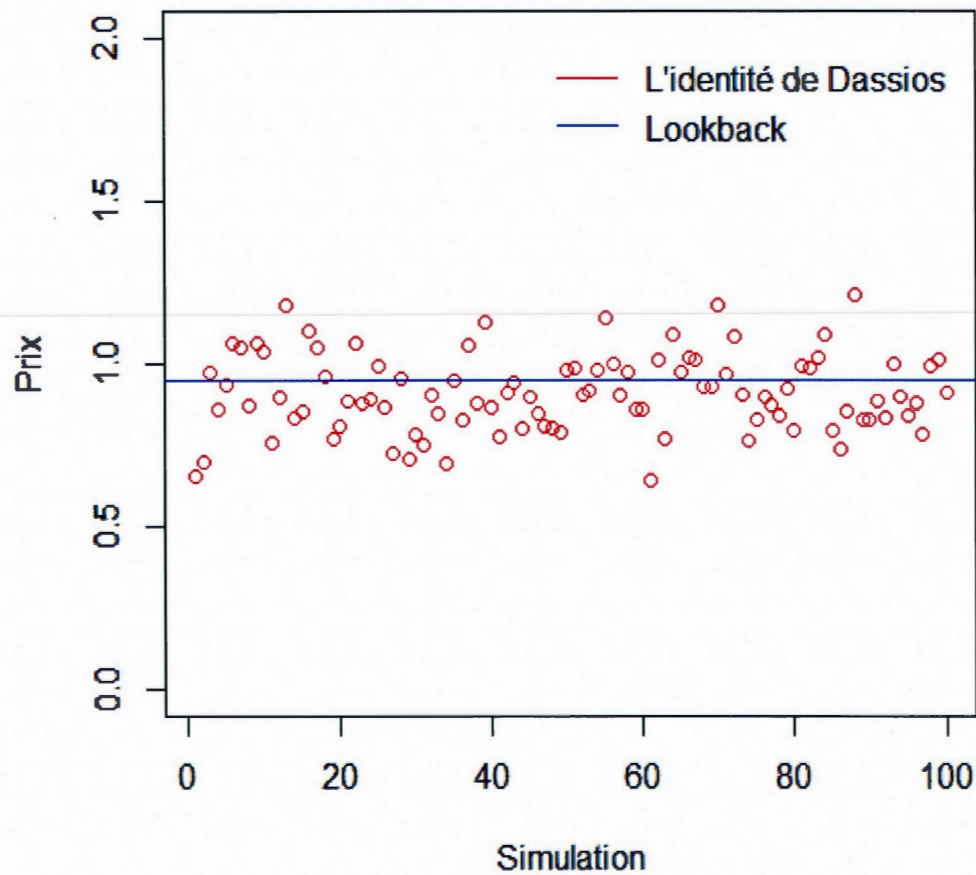


Figure 4.3 Le prix d'une option lookback comparé à le prix d'une option α -lookback simulées à l'aide de l'identité de Dassios. La ligne rouge est la moyenne des prix des α -lookback ($\alpha = .9999$, $\sigma = .2$, $r = .01$, $T = 1$, $S_0 = 10$, $K = 11$).



dans la section précédente que le prix de l'option α -lookback est toujours inférieur à celui de l'option lookback. Dans la figure 4.3 α a été élevé à .9999 et comme prévu, le prix initial moyen de l'option α -lookback est très proche du prix initial de l'option lookback, mais est un peu plus bas. Avec le fait que le prix d'une option α -lookback est proche du prix d'une option lookback quand α est proche de 1, il est possible de réduire la variance de notre simulation en utilisant la technique de variable de contrôle. Quand α est proche de 1, nous pouvons utiliser l'option lookback comme la variable de contrôle. Pour les grandes lignes de la technique de variable de contrôle voir Ballotta et Kyprianou (2001).

Approximation des options asiatiques

Un aspect intéressant des options α -lookback est qu'elles peuvent être utilisées pour se rapprocher des options asiatiques. Comme les options asiatiques présentent de nombreuses difficultés de calcul on peut les approximer en utilisant une option médiane c'est-à-dire une option α -lookback avec $\alpha = 0.5$. Nous allons commencer par un rappel de la définition d'une option asiatique.

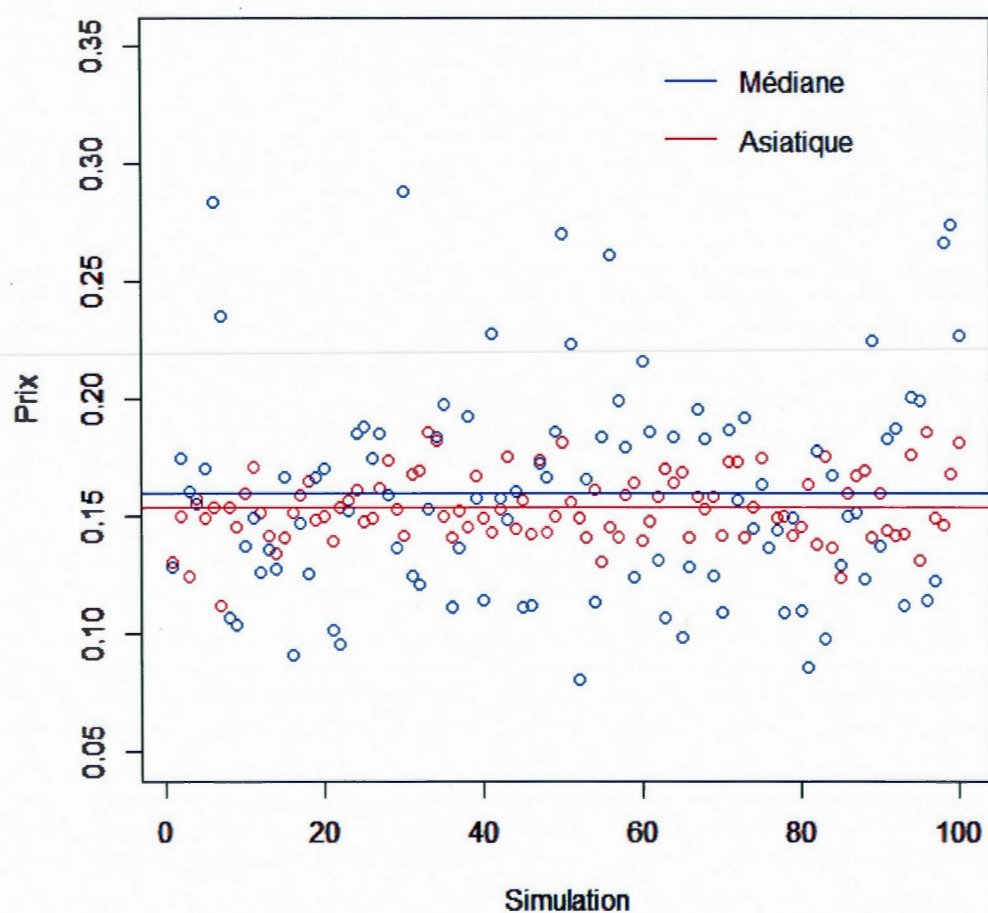
Définition 4.2.1. Une option asiatique est une option avec un paiement à l'échéance, $T > 0$, donné par,

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)^+,$$

où $K > 0$.

En mots, ce paiement est la moyenne arithmétique de tous les prix d'actions jusqu'à un certain temps fixé, moins le prix d'exercice, et le paiement s'effectue uniquement si elle est positive. Comme nous l'avons dit, il est très difficile de trouver le prix de ces options d'un point de vue numérique. Comme il est beaucoup plus facile de trouver le prix d'une α -lookback d'un point de vue numérique, nous pouvons les utiliser pour approximer des options asiatiques. Dans la figure 4.4

Figure 4.4 Prix simulés d'options asiatiques et options médianes. Les lignes rouge et bleu représentent les prix moyens. ($\alpha = .5$, $\sigma = .2$, $r = .01$, $T = 1$, $S_0 = 10$, $K = 11$)



nous avons tracé les prix simulés d'options médianes en utilisant l'identité de Dassios et les prix simulés d'options asiatiques en utilisant une simulation naïve. Les moyennes des deux prix des options sont similaires,

$$\bar{X}_{\text{médiane}} = 0.1611604,$$

$$\bar{X}_{\text{asiatique}} = 0.1535501.$$

Cependant l'écart-type pour l'option médiane est beaucoup plus élevé (près de 4 fois plus élevé),

$$s_{\text{médiane}} = 0.04212023,$$

$$s_{\text{asiatique}} = 0.01207609.$$

Les intervalles de confiance à 95% sont,

$$(0.1529048, 0.169416),$$

pour l'option médiane, et,

$$(0.1511832, 0.155917),$$

pour l'option asiatique.

Il existe de nombreuses applications des α -quantiles que nous n'avons pas discutées ici. Nous discuterons brièvement de quelques-uns d'entre eux dans la conclusion.

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons présenté une introduction aux temps d'occupation ainsi que leurs applications en mathématiques financières. Nous avons aussi présenté des preuves qui sont plus détaillées que ce qui est actuellement dans la littérature. Pour ceux qui sont intéressés par d'autres lectures, il y a beaucoup d'idées intéressantes et connexes que nous n'avons pas présentées ici.

En 2002, Dmitry Davydov et Vadim Linetsky ont écrit un article (?) sur la tarification et la couverture des options d'achat escalier exponentiel à deux barrières. Ces options ont le paiement à l'échéance suivant :

$$e^{-\rho_1 A^{S,+;u} - \rho_2 A^{S,-;l}} (S_T - K)^+,$$

où $\rho_1, \rho_2 > 0$ and $u > l$.

En 1992, Miura (?) a introduit une option d'échange $\alpha\beta$ -quantile, qui, selon lui, est importante quand on veut mesurer la capacité d'investissement des gestionnaires. Le paiement à l'échéance de ces options est,

$$(Q_\alpha^S(T) - Q_\beta^S(T))^+.$$

À ma connaissance, le prix de ces options ne peut être trouvé analytiquement puisque la forme fermée de la fonction de répartition de $(Q_\alpha^W(T), Q_\beta^W(T))$ est actuellement inconnue. Voir Fujita (2000) pour plus d'informations.

En 2002, Laura Ballotta a écrit un article intéressant (?) sur les options α -lookback dans une économie de diffusion à saut où le prix de l'action au temps $t > 0$ est

donnée par,

$$S_t = S_0 e^{L_t},$$

où $S_0 > 0$ et L_t est un processus de Lévy. La dynamique du prix de l'action est donnée par,

$$dS_t = [r - \lambda \mathbb{E}^*(Z)] S_{t-} dt + \sigma S_{t-} dB_t^* + S_{t-} \int_{\mathbb{R}} z N(dt, dz),$$

où \mathbb{P}^* est une mesure de probabilité neutre au risque, $N(dt, dz)$ est une mesure de Poisson de comptage homogène sur $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, qui est indépendant de W^* , avec un taux λ , et compensateur $\nu(dz)dt$ sur $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ et $Z = e^X - 1$, où X est indépendant de N et W^* et représente la somme des sauts de L_t .

En 2005, Dassios (?) a introduit l'idée d'une option α -barrière. Une option α -barrière est une option avec un paiement à l'échéance donné par,

$$f(S_t, t \leq T) \mathbb{I}_{\{\eta_\alpha^S(T) > v, \xi_\alpha^S(T) < u\}}$$

En mots, c'est une option où le paiement à l'échéance est annulé si un certain α -quantile est atteint trop tôt ou trop tard. La fonction de densité de $(\eta_\alpha^B, \xi_\alpha^B, Q_\alpha^B, B_1)$ peut être trouvée dans la section 3.2.2.

En 2006, Dassios a montré que l'identité de Dassios fonctionne pour les processus Lévy.

Proposition 4.2.2. (?) Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy et soit $X^{(1)} = (X_t^{(1)})_{t \geq 0}$ et $X^{(2)} = (X_t^{(2)})_{t \geq 0}$ deux copies indépendantes de X . Alors,

$$Q_\alpha^X(T) \stackrel{d}{=} \sup_{0 \leq s \leq \alpha t} X_s^{(2)} + \inf_{0 \leq s \leq \alpha t} X_s^{(2)}.$$

Cela peut être utilisé pour faciliter la simulation des α -quantiles dans un modèle de Lévy ainsi que pour aider à se rapprocher des options asiatiques dans un modèle de Lévy.

À la fin des années 2000, dans un document non publié (?), Olivier Vergote a introduit l'idée intéressante de l'estimation de la volatilité basée sur des α -quantiles. Dans cet article, Vergote commence avec un mouvement brownien standard avec un paramètre de diffusion constant c'est-à-dire un processus $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ qui résout l'équation différentielle stochastique suivante,

$$dZ_t = \sigma dB_t.$$

Il utilise alors des α -quantiles de Z pour construire des estimateurs sans biais et efficaces pour σ et σ^2 .

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

APPENDICE A

CHAPITRE 1

A.1 Preuves détaillées du chapitre 1

A.1.1 Lemme 1.2.1.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{\mu^2 + 2s}}{s} \right\} = \int_t^\infty \frac{e^{\frac{-\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta + \mu.$$

Démonstration. Pour commencer, nous allons utiliser l'égalité suivante,

$$\frac{\sqrt{\mu^2 + 2s}}{s} = \frac{1}{s} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}} d\lambda + \frac{\mu}{s},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{\mu^2 + 2s}}{s} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}} d\lambda + \frac{\mu}{s} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}} d\lambda \right\} + \mu. \end{aligned}$$

Maintenant, si nous définissons

$$F(s) := \frac{1}{s} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}} d\lambda,$$

nous avons que

$$\frac{d}{ds} (sF(s)) = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 2s}},$$

et avec le résultat bien connu,

$$\mathcal{L}\{tf'(t)\} = -\frac{d}{ds}(sF(s)),$$

Nous avons que

$$\mathcal{L}\{tf'(t)\} = -\frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 2s}}.$$

Ce qui nous donne que,

$$\begin{aligned} tf'(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 2s}}\right\} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{2} + s}}\right\} \\ &= \frac{-e^{-\frac{\mu^2}{2}t}}{\sqrt{2\pi t}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$f'(t) = \frac{-e^{-\frac{\mu^2}{2}t}}{\sqrt{2\pi t^3}}.$$

Maintenant avec le théorème fondamental du calcul nous avons que,

$$f(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta,$$

et le résultat souhaité suit directement,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\mu^2 + 2s}}{s}\right\} = \int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}\theta}}{\sqrt{2\pi\theta^3}} d\theta + \mu.$$

□

A.2 Les deux autres lois de l'arc-sinus de Lévy

Le théorème suivant est un résultat contre-intuitif généralement appelé la deuxième loi de l'arc-sinus de Lévy.

Théorème A.2.1. (?) Soit $\tau_L^B(T)$ le dernier moment où la particule brownienne retourne à l'origine dans l'intervalle $[0, T]$ c'est-à-dire $\tau_L^B(T) := \sup\{s > 0 : B_s = 0\}$. Alors $\tau_L^B(T)$ suit une loi de l'arc-sinus c'est-à-dire,

$$\mathbb{P}(\tau_L^B(T) \leq u) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sqrt{\frac{u}{T}}\right).$$

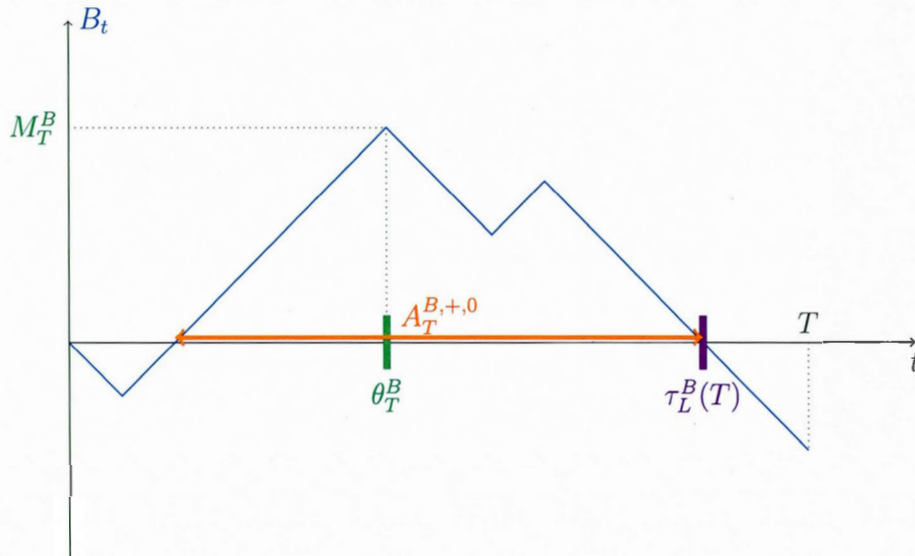
Afin de voir pourquoi il s'agit d'un résultat contre-intuitif, nous allons présenter un exemple de tirage de pièces de monnaie de Feller (1968). Puisque le mouvement brownien est un cas limite d'une marche aléatoire, ce résultat donne une bonne approximation pour un jeu de tirage de pièces de monnaie. Disons que vous jouez à un jeu où vous tirez une pièce de monnaie à chaque seconde pendant un an. Vous gagnez un dollar (+1) si le résultat est face et vous perdez un dollar (-1) si c'est pile (vous pouvez être en dette (négatif)). À la fin de l'année vous avez réalisé qu'il n'y a pas eu de changement de signe de la valeur de votre compte bancaire dans les 23,587,200 derniers lancers de la pièce de monnaie. Y a-t-il un problème avec la pièce de monnaie? Les derniers 23,587,200 lancers représentent les derniers 75% des lancers et la probabilité de ne pas avoir de changement de signe dans les derniers 75% des lancers ou plus est environ,

$$\mathbb{P}(\tau_L^B(T) \leq \sqrt{.25}) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{.25}) = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent, sur cette base, il n'est pas possible de dire qu'il existe un problème avec une pièce de monnaie. La plupart des gens supposent que le dernier changement de signe aurait lieu vers la fin du jeu. Cependant en raison de la symétrie de la loi de l'arc-sinus, le dernier changement de signe a autant de chances d'être au début du jeu que d'être à la fin. En fait, il y a une probabilité de 50% qu'il n'y aura pas de changement de signe dans la dernière moitié des lancers indépendamment du nombre de lancers qu'il y a.

Le théorème suivant est généralement appelé la troisième loi de l'arc-sinus de Lévy.

Figure A.1 Les trois lois de l'arc-sinus de Lévy



Théorème A.2.2. (?) Soit θ_T^B le dernier moment où la particule brownienne atteint sa valeur maximale dans l'intervalle $[0, T]$ c'est-à-dire $\theta_T^B := \sup\{s > 0 : B_s = M_T^B\}$. Alors θ_T^B suit une loi de l'arc-sinus c'est-à-dire,

$$\mathbb{P}(\theta_T^B \leq u) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sqrt{\frac{u}{T}}\right).$$

Voir la figure A.1 pour une illustration des trois lois de l'arc-sinus de Lévy.

APPENDICE B

CHAPITRE 2

B.1 Preuves détaillées du chapitre 2

B.1.1 Théorème 2.1.1.

Dans cette section, nous allons fournir tous les détails des calculs correspondant aux quatre étapes de la démonstration du théorème 2.1.1 décrit dans le chapitre 2.

Étape 1

Pour commencer nous allons définir $\mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B,-,0}} \delta_{B_T-z}(0) \right] dz$ comme $\Lambda_\rho(z, x; T) dz$. Ensuite nous allons définir $G_\rho(z, x; s)$ comme la transformée de Laplace de $\Lambda_\rho(z, x; T)$ par rapport à T . Nous allons trouver $G_\rho(z, x; s)$ avec le théorème 1.1.2. Donc, pour commencer,

$$\begin{aligned} G_\rho(z, x; s) &:= \int_0^\infty e^{-sT} \Lambda_\rho(z, x; T) dT \\ &:= \int_0^\infty e^{-sT} \mathbb{E}_x \left[e^{\nu B_T - \rho A_T^{B,-,0}} \delta_{B_T-z}(0) \right] dT \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}_x \left[e^{\int_0^T -s - \rho \mathbb{I}_{(B_t < 0)} dt} \delta_{B_T-z}(0) \right] dT \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{\int_0^T -s - \rho \mathbb{I}_{(B_t < 0)} dt} \delta_{B_T-z}(0) dT \right]. \end{aligned}$$

Donc,

$$G_\rho(z, x; s) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{\int_0^T -s - \rho \mathbb{I}_{(B_t < 0)} dt} \delta_{B_T - z}(0) dT \right]. \quad (\text{B.1})$$

Avec le théorème 1.1.2. nous savons que $G_\rho(z, x; s)$ est la solution bornée à l'équation différentielle ordinaire (EDO),

$$\frac{1}{2} G_{xx} - (s + \rho \mathbb{I}_{(x < 0)}) G = -\delta_{(x-z)}.$$

Pour résoudre cette EDO nous allons utiliser la méthode de variation des paramètres. Nous allons résoudre cette équation dans quatre régions différentes :

- Région i , $\{x \geq 0, z \geq 0\}$: $\frac{1}{2} G_{xx} - sG = -\delta_{(x-z)}$

La solution de l'équation homogène, notée $G_h(x)$, peut être facilement trouvée comme,

$$G_h(x) = Ae^{x\sqrt{2s}} + Be^{-x\sqrt{2s}}.$$

Si nous prenons $y_1(x) = e^{x\sqrt{2s}}$ et $y_2(x) = e^{-x\sqrt{2s}}$ notre solution particulière est,

$$G_p(x) = -e^{x\sqrt{2s}} \int_0^x \frac{e^{-t\sqrt{2s}}}{\frac{1}{2} W_{y_1, y_2}(t)} (-\delta_{(t-z)}) dt + e^{-x\sqrt{2s}} \int_0^x \frac{e^{t\sqrt{2s}}}{\frac{1}{2} W_{y_1, y_2}(t)} (-\delta_{(t-z)}) dt,$$

où $W_{y_1, y_2}(x)$ est le wronskien de y_1 et y_2 , c'est-à-dire $W_{y_1, y_2}(x) = -2\sqrt{2s}$, ce qui nous donne que,

$$G_p(x) = -\frac{e^{(x-z)\sqrt{2s}}}{\sqrt{2s}} H(x-z) + \frac{e^{(z-x)\sqrt{2s}}}{\sqrt{2s}} H(x-z),$$

où H est la fonction de Heavyside.

Maintenant, avec $G_h(x)$ et $G_p(x)$, nous avons la solution générale suivante,

$$G(x) = Ae^{x\sqrt{2s}} + Be^{-x\sqrt{2s}} - \frac{e^{(x-z)\sqrt{2s}}}{\sqrt{2s}} H(x-z) + \frac{e^{(z-x)\sqrt{2s}}}{\sqrt{2s}} H(x-z),$$

Finalement la solution générale, *bornée*, est donnée par :

$$G(x) = \begin{cases} Be^{-x\sqrt{2s}} + \frac{1}{\sqrt{2s}} e^{(z-x)\sqrt{2s}}, & \text{si } x \geq z, \\ Ae^{x\sqrt{2s}} + Be^{-x\sqrt{2s}}, & \text{si } x < z. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Pour trouver la constante A nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme B.1.1. *Si $y(x)$ est une solution à l'équation,*

$$ay'' + by' + cy = \delta_{(t-t_0)}(0),$$

alors $y(x)$ est continue et $y'(x)$ a un saut à t_0 de grandeur $\frac{1}{a}$; c.-à-d. $y'(t_0+) - y'(t_0-) = \frac{1}{a}$.

Maintenant avec le lemme B.1.1. nous avons que $A = \frac{e^{-z\sqrt{2s}}}{\sqrt{2s}}$, et avec A (B.2) devient,

$$G(x) = Be^{-x\sqrt{2s}} + \frac{e^{-|x-z|\sqrt{2s}}}{\sqrt{2s}}. \quad (\text{B.3})$$

Pour trouver la constante B il faut d'abord la solution pour la région *ii*.

- Région *ii*, $\{x \leq 0, z \geq 0\}$: $\frac{1}{2}G_{xx} - (s + \rho)G = 0$

Dans cette région, la solution générale est donnée par l'équation suivante,

$$G(x) = Ce^{x\sqrt{2(s+\rho)}} + De^{-x\sqrt{2(s+\rho)}},$$

avec la solution générale, bornée,

$$G(x) = Ce^{x\sqrt{2(s+\rho)}}. \quad (\text{B.4})$$

Pour trouver les constantes B et C , nous allons encore une fois utiliser le théorème 1.1.2. qui nous dit que G et G' doivent être continues à zéro, c'est-à-dire,

$$G(0+) = G(0-) \text{ et } G'(0+) = G'(0-).$$

En comparant les régions *i* et *ii*, le fait que $G(0+) = G(0-)$ et $G'(0+) = G'(0-)$ nous donne le système d'équations suivant,

$$\begin{cases} B + \frac{e^{-z\sqrt{2s}}}{\sqrt{2s}} = C \\ e^{-z\sqrt{2s}} - B\sqrt{2s} = C\sqrt{2(s+\rho)}. \end{cases}$$

En résolvant ce système nous avons que,

$$B = -\frac{e^{-z\sqrt{2s}}}{\sqrt{2s}} \left(\frac{\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} \right) \quad (\text{B.5})$$

et

$$C = \frac{e^{-z\sqrt{2s}}}{\sqrt{2s}} \left(1 - \frac{\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} \right) = \frac{e^{-z\sqrt{2s}}}{\sqrt{2s}} \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}}. \quad (\text{B.6})$$

En substituant (B.5) et (B.6) dans (B.3) et (B.4) respectivement, nous avons que,

$$G_\rho(z, x; s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2s}} \left(e^{-|x-z|\sqrt{2s}} - \frac{\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{-(z+x)\sqrt{2s}} \right), & x \geq 0, z \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2s}} \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{x\sqrt{2(s+\rho)} - z\sqrt{2s}}, & x \leq 0, z \geq 0. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

• Régions *iii* $\{x \geq 0, z \leq 0\}$ et *iv* $\{x \leq 0, z \leq 0\}$:

En suivant la même démarche que nous avons faite dans les régions *i* et *ii*, nous avons que,

$$G_\rho(z, x; s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2(s+\rho)}} \left(e^{-|x-z|\sqrt{2(s+\rho)}} - \frac{\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{(z+x)\sqrt{2(s+\rho)}} \right), & x \leq 0, z \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2s}} \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{z\sqrt{2(s+\rho)} - x\sqrt{2s}}, & x \geq 0, z \leq 0. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Remarque B.1.1. Les quatre régions qui sont nécessaires pour résoudre cette EDO correspondent aux quatre régions du prix initial de l'option. Ceci peut être démontré en utilisant (2.1) et (2.2), c'est-à-dire,

$$x \geq 0,$$

implique, par définition, que

$$\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{S_0}{b} \right) \geq 0,$$

ce qui nous donne que

$$S_0 \geq b.$$

Nous verrons plus tard que

$$z \geq 0,$$

implique que

$$k \geq 0.$$

Par définition, cela implique que

$$\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{b} \right) \geq 0,$$

ce qui nous donne que

$$K \geq b.$$

Étape 2

Maintenant que nous avons trouvé la forme explicite de $G_\rho(z, x; s)$, nous pouvons l'utiliser pour trouver $\Lambda_\rho(z, x; T)$. Il ne faut pas oublier que nous avons défini $G_\rho(z, x; s)$ comme la transformée de Laplace de $\Lambda_\rho(z, x; T)$ par rapport à T . Nous allons donc trouver $\Lambda_\rho(z, x; T)$ en prenant la transformée de Laplace inverse de $G_\rho(z, x; s)$. Nous allons utiliser les transformées de Laplace inverses suivantes,

$$\mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1}\{1\} = \delta_T(0), \quad (\text{B.9})$$

$$\mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-a\sqrt{s}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi T}}e^{-\frac{a^2}{4T}}, \quad a \geq 0, \quad (\text{B.10})$$

$$\mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1}\left\{e^{-a\sqrt{s}}\right\} = \frac{a}{\sqrt{2\pi T^3}}e^{-\frac{a^2}{4T}}, \quad a > 0, \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1}\left\{\sqrt{s}e^{-a\sqrt{s}}\right\} = \frac{(a-2T)}{4\sqrt{\pi T^5}}e^{-\frac{a^2}{4T}}, \quad a \geq 0, \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} = H(T-a), \quad (\text{B.13})$$

$$\mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{a}}\right\} = \mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{s+a}-\sqrt{s}}{a}\right\} = \frac{1-e^{-aT}}{2a\sqrt{\pi T^3}}, \quad a \geq 0. \quad (\text{B.14})$$

De plus, nous allons utiliser la propriété de convolution suivante,

$$\mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}\right\} = \int_0^T f(T-t)g(t)dt, \quad (\text{B.15})$$

• Région i $\{x \geq 0, z \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} \Lambda_\rho^i(z, x; T) &= \mathcal{L}^{-1}\{G_\rho^i(z, x; s)\} \\ &= \mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s}}\left(e^{-|x-z|\sqrt{2s}} - \frac{\sqrt{(s+\rho)}-\sqrt{s}}{\sqrt{(s+\rho)}+\sqrt{s}}e^{-(z+x)\sqrt{2s}}\right)\right\} \\ &= \mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s}}\left(e^{-|x-z|\sqrt{2s}} - \left(1 - \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{(s+\rho)}+\sqrt{s}}\right)e^{-(z+x)\sqrt{2s}}\right)\right\} \\ &= \mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s}}e^{-|x-z|\sqrt{2s}} - \frac{1}{\sqrt{2s}}e^{-(z+x)\sqrt{2s}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho}+\sqrt{s}}e^{-(z+x)\sqrt{2s}}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(A.10 \text{ et } A.15)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2T}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(x+z)^2}{2T}} \right) \\
& + \int_0^T \mathcal{L}_{s \rightarrow T-t}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} \right\} \mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1} \left\{ e^{-(z+x)\sqrt{2s}} \right\} dt \\
& \stackrel{(A.14 \text{ et } A.11)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2T}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(x+z)^2}{2T}} \right) \\
& + \int_0^T \left(\frac{1 - e^{-\rho(T-t)}}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} \right) \left(\frac{(z+x)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(z+x)^2}{2t}} \right) dt \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left(e^{-\frac{(x-z)^2}{2T}} - e^{-\frac{(x+z)^2}{2T}} \right) \\
& + \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})(z+x)}{2\rho\pi\sqrt{(T-t)^3 t^3}} e^{-\frac{(z+x)^2}{2t}} dt, \quad x+z > 0. \tag{B.16}
\end{aligned}$$

Remarque. En regardant la solution de cette transformée de Laplace inverse, nous pouvons voir que la partie orange de l'équation est un point de masse à $t = 0$. La raison pour laquelle ce point de masse existe est la suivante,

$$\begin{aligned}
\Lambda_\rho^i(z, x; T) &:= \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{B_T - z}(0) \right] \\
&= \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{B_T}(z) \right] \\
&= \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho t} \delta_y(z) \mathbb{P}_x \left(B_T \in dy, A_T^{B, -, 0} \in dt \right) \\
&= \int_0^T e^{-\rho t} \mathbb{P}_x \left(B_T \in dz, A_T^{B, -, 0} \in dt \right) \\
&= \int_0^T \left[1 \cdot \mathbb{P}_x \left(B_T \in dz, A_T^{B, -, 0} = 0 \right) + e^{-\rho t} \mathbb{P}_x \left(B_T \in dz, A_T^{B, -, 0} \in dt \right) \right] \\
&= 1 \cdot \mathbb{P}_x \left(B_T \in dz, A_T^{B, -, 0} = 0 \right) + \int_0^T e^{-\rho t} \mathbb{P}_x \left(B_T \in dz, A_T^{B, -, 0} \in dt \right),
\end{aligned}$$

car dans la région i , si x (le point de départ de B) et z (le point terminal de B) sont tous les deux supérieurs à zéro, alors il y a une probabilité positive que B n'aille jamais en dessous de zéro, c'est-à-dire $\mathbb{P} \left(A_T^{B, -, 0} = 0 \right) > 0$. De plus, si x ou z est égal à zéro le point de masse disparaîtra, car si le mouvement brownien commence ou se termine à 0 c'est "impossible" qu'il n'aille jamais en dessous de zéro, c'est-à-dire $\mathbb{P} \left(A_T^{B, -, 0} = 0 \right) = 0$.

• Région ii $\{x \leq 0, z \geq 0\}$:

$$\Lambda_\rho^{ii}(z, x; T) \quad (B.17)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1} \{G_\rho^{ii}(z, x; s)\} \\ &= \mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2s}} \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{(s+\rho)} + \sqrt{s}} e^{x\sqrt{2(s+\rho)} - z\sqrt{2s}} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\rho} \mathcal{L}_{s \rightarrow T}^{-1} \left\{ \sqrt{s+\rho} \cdot e^{x\sqrt{2(s+\rho)}} e^{-z\sqrt{2s}} - \sqrt{s} \cdot e^{-z\sqrt{2s}} e^{x\sqrt{2(s+\rho)}} \right\} \\ &\stackrel{(A.15)}{=} \frac{\sqrt{2}}{\rho} \int_0^T \mathcal{L}_{s \rightarrow T-t}^{-1} \left\{ \sqrt{s+\rho} \cdot e^{x\sqrt{2(s+\rho)}} \right\} \mathcal{L}_{s \rightarrow t}^{-1} \left\{ e^{-z\sqrt{2s}} \right\} \\ &\quad - \mathcal{L}_{s \rightarrow T-t}^{-1} \left\{ e^{x\sqrt{2(s+\rho)}} \right\} \mathcal{L}_{s \rightarrow t}^{-1} \left\{ \sqrt{s} \cdot e^{-z\sqrt{2s}} \right\} dt \\ &\stackrel{(A.12 \text{ et } A.11)}{=} \frac{\sqrt{2}}{\rho} \int_0^T e^{-\rho(T-t)} \frac{(2x^2 - 2(T-t))}{4\sqrt{\pi(T-t)^5}} e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}} \frac{z}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{z^2}{2t}} \\ &\quad - e^{-\rho(T-t)} \frac{(-x)}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}} \frac{(z^2 - t)}{2\sqrt{\pi t^5}} e^{-\frac{z^2}{2t}} dt, \quad z > 0, \quad (B.18) \\ &= \int_0^T e^{-\rho(T-t)} \frac{[zt(x^2 - (T-t)) + x(T-t)(z^2 - t)]}{2\rho\pi\sqrt{(T-t)^5 t^5}} e^{-\frac{x^2}{2(T-t)} - \frac{z^2}{2t}} dt, \quad z > 0. \end{aligned}$$

(B.19)

Linetsky a manipulé cette équation pour faciliter les calculs numériques que nous n'aborderons pas ici. La seule raison pour laquelle j'ai suivi cette manipulation est que je voulais arriver à la même réponse que Linetsky (1999). Nous allons d'abord prendre la transformée de Laplace inverse comme nous l'avons fait pour obtenir (B.17), de chaque côté de l'équation suivante,

$$\left(\sqrt{s} e^{x\sqrt{2s}} \right) \left(e^{-z\sqrt{2s}} \right) - \left(e^{x\sqrt{2s}} \sqrt{s} \right) \left(e^{-z\sqrt{2s}} \right) \equiv 0,$$

ce qui nous donne l'équation suivante,

$$\int_0^T \frac{[zt(x^2 - (T-t)) + x(T-t)(z^2 - t)]}{2\rho\pi\sqrt{(T-t)^5 t^5}} e^{-\frac{x^2}{2(T-t)} - \frac{z^2}{2t}} dt = 0. \quad (B.20)$$

Maintenant si on prend (B.18) et nous soustrayons (B.19), nous arrivons au ré-

sultat de Linetsky (1999),

$$\Lambda_\rho^{ii}(z, x; T) = \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) \left[z(1 - \frac{x^2}{T-t}) + x(1 - \frac{z^2}{t}) \right]}{2\pi\rho\sqrt{(T-t)^3 t^3}} e^{-\frac{x^2}{2(T-t)} - \frac{z^2}{2t}} dt. \quad (\text{B.21})$$

Pour trouver la fonction $\Lambda_\rho(z, x; T)$ dans les régions *iii* $\{x \geq 0, z \leq 0, z < 0\}$ et *iv* $\{x \leq 0, z \leq 0, z + x < 0\}$ nous avons besoin du lemme suivant, qui démontre une propriété de symétrie de $\Lambda_\rho(z, x; T)$.

Lemme B.1.2. Pour $x, z \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$,

$$\Lambda_\rho(z, x; T) = e^{-\rho T} \Lambda_{-\rho}(-z, -x; T).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Lambda_\rho(z, x; T) dz &= \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{B_T - z}(0) \right] dz \\ &= \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B, -, 0}} \delta_{B_T}(z) \right] dz \\ &= \mathbb{E}_{-x} \left[e^{-\rho A_T^{-B, +, 0}} \delta_{-B_T}(-z) \right] dz \\ &= \mathbb{E}_{-x} \left[e^{-\rho(T - A_T^{-B, -, 0})} \delta_{-B_T}(-z) \right] dz \\ &= e^{-\rho T} \mathbb{E}_{-x} \left[e^{\rho A_T^{-B, -, 0}} \delta_{-B_T}(-z) \right] dz \\ &= e^{-\rho T} \Lambda_{-\rho}(-z, -x; T) dz, \end{aligned}$$

car $B_T \stackrel{d}{=} -B_T$. □

Maintenant avec le lemme B.1.2. nous avons que :

- Région *iii*, $\{x \geq 0, z \leq 0, z < 0\}$,

$$\Lambda_\rho^{iii}(z, x; T) = e^{-\rho T} \Lambda_{-\rho}^{ii}(-z, -x; T) \quad (\text{B.22})$$

- Région *iv*, $\{x \leq 0, z \leq 0, x + z < 0\}$,

$$\Lambda_\rho^{iv}(z, x; T) = e^{-\rho T} \Lambda_{-\rho}^i(-z, -x; T), \quad (\text{B.23})$$

et finalement pour $x = z = 0$, nous avons que,

$$\Lambda_\rho(0, 0; T) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2s}} \left(\frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{(s+\rho)} + \sqrt{s}} \right) \right\} = \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho\sqrt{2\pi T^3}}. \quad (\text{B.24})$$

Remarque. Nous pouvons montrer que Λ est continue à l'origine ($x = 0, z = 0$), c.-à-d. $\lim_{z \rightarrow 0^+} \Lambda_\rho(0, z; T) = \lim_{z \rightarrow 0^-} \Lambda_\rho(0, z; T) = \Lambda_\rho(0, 0; T)$, en utilisant le résultat suivant de Linetsky (1999),

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \Lambda_\rho(z, 0; T) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \int_0^T \frac{z(1 - e^{-\rho(T-t)})}{2\pi\rho(T-t)^{3/2}t^{3/2}} e^{-\frac{z^2}{2t}} dt = \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho\sqrt{2\pi T^3}},$$

avec le fait que,

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} \Lambda_\rho(z, 0; T) \stackrel{\text{lem. B.1.2.}}{=} \lim_{z \rightarrow 0^-} e^{-\rho T} \Lambda_{-\rho}(-z, -x; T) = \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho\sqrt{2\pi T^3}},$$

et

$$\Lambda_\rho(0, 0; T) \stackrel{(\text{B.23})}{=} \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho\sqrt{2\pi T^3}}.$$

Nous sommes maintenant prêts à calculer la fonction $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ et donc le prix initial d'une option escalier exponentielle vers le bas, $C_\rho^-(S; T, K, b)$.

Étape 3

Dans cette étape, nous allons utiliser la fonction $\Lambda_\rho(z, x; T)$ que nous avons trouvée dans l'étape 2 pour calculer $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$. Pour ce faire, nous devons calculer l'intégrale dans (2.6), c'est-à-dire nous devons calculer,

$$\Psi_\rho(\nu; k, x, T) = \int_k^\infty e^{\nu z} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho A_T^{B, -0}} \delta_{z-B_T}(0) \right] dz := \int_k^\infty e^{\nu z} \Lambda_\rho(z, x; T) dz.$$

Avant de commencer voici un rappel de la notation.

Rappel B.1.1. Pour $\sigma, S_0, K, b, r, T > 0$,

$$\nu = \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right), \quad \gamma = r + \frac{\nu^2}{2}, \quad (\text{B.25})$$

$$x = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{S_0}{b} \right), \quad k = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K}{b} \right), \quad (\text{B.26})$$

$$d_1 = \frac{-k + x + \nu T}{\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 + \sigma \sqrt{T},$$

$$d_3 = \frac{-k - x + \nu T}{\sqrt{T}}, \quad d_4 = d_3 + \sigma \sqrt{T},$$

$$d_5 = \frac{-k - x + \nu t}{\sqrt{t}}, \quad d_6 = d_5 + \sigma \sqrt{t},$$

$$d_7 = \frac{-k + \nu t}{\sqrt{t}}, \quad d_8 = d_7 + \sigma \sqrt{t},$$

$$C_1 = 1 - \frac{x^2}{T-t} - \nu x, \quad C_2 = t^{-\frac{1}{2}} C_1 - t^{-\frac{3}{2}} x k, \quad C_3 = C_1 - \sigma x.$$

Étant donné que le calcul de ces intégrales est long et fastidieux, Linestsky (1999) nous a fourni le lemme suivant afin de faciliter les calculs.

Lemme B.1.3. Soit $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \int_{-\infty}^a (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) e^{bx - \frac{x^2}{2c}} dx = e^{\frac{cb^2}{2}} [A\Phi(d) - B\phi(d)],$$

où

$$d = \frac{a - cb}{\sqrt{c}}, \quad A = \alpha c(cb^2 + 1) + \beta cb + \gamma, \quad B = \alpha c(2b\sqrt{c} + d) + \beta\sqrt{c}.$$

Avec ce lemme nous sommes maintenant prêts à calculer la fonction $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ pour chacune des quatre régions.

- Région i , $\{x \geq 0, k \geq 0\}$:

$$\begin{aligned}\Psi_\rho^i(\nu; k, x, T) &= \int_k^\infty e^{\nu z} \Lambda_\rho^i(z, x; T) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^\infty e^{\nu z - \frac{(x-z)^2}{2T}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^\infty e^{\nu z - \frac{(x+z)^2}{2T}} dz \\ &\quad + \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_k^\infty (z+x) e^{\nu z - \frac{(x+z)^2}{2t}} dz \right) dt\end{aligned}$$

En utilisant le lemme B.1.3. avec un peu d'algèbre simple et quelques calculs simples, l'équation suivante peut être facilement déduite.

$$\Psi_\rho^i(\nu; k, x, T) \quad (B.27)$$

$$\begin{aligned}&= e^{\nu x + \frac{\nu^2 T}{2}} \Phi(d_1) - e^{-\nu x + \frac{\nu^2 T}{2}} \Phi(d_3) \\ &\quad + e^{-\nu x} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\frac{\nu^2 t}{2}} \left[\nu \Phi(d_5) + t^{-\frac{1}{2}} \phi(d_5) \right] dt.\end{aligned} \quad (B.28)$$

- Région ii , $\{x \leq 0, k \geq 0\}$:

$$\begin{aligned}\Psi_\rho^{ii}(\nu; k, x, T) &= \int_k^\infty e^{\nu z} \Lambda_\rho^{ii}(z, x; T) dz \\ &= \int_k^\infty e^{\nu z} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})}{2\pi \rho \sqrt{(T-t)^3 t^3}} \left[z \left(1 - \frac{x^2}{T-t} \right) + x \left(1 - \frac{z^2}{t} \right) \right] e^{-\frac{x^2}{2(T-t)} - \frac{z^2}{2t}} dt dz \\ &= \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}} \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_k^\infty \left[z \left(1 - \frac{x^2}{T-t} \right) + x \left(1 - \frac{z^2}{t} \right) \right] e^{\nu z - \frac{z^2}{2t}} dz \right) dt.\end{aligned}$$

Maintenant en appliquant le lemme B.1.3. nous avons l'équation suivante,

$$\Psi_\rho^{ii}(\nu; k, x, T) = \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\frac{\nu^2 t}{2} - \frac{x^2}{2(T-t)}} [\nu C_1 \Phi(d_7) + C_2 \phi(d_7)] dt. \quad (B.29)$$

Pour les deux prochaines régions nous allons utiliser la symétrie de $\Lambda_\rho(z, x; T)$, voir lemme B.1.2., pour trouver la fonction $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ dans ces régions.

• Région *iii*, $\{x \geq 0, k \leq 0\}$:

$$\begin{aligned}
\Psi_\rho^{iii}(\nu; k, x, T) &= \int_k^\infty e^{\nu z} \Lambda_\rho(z, x; T) dz \\
&= \int_k^0 e^{\nu z} \Lambda_\rho^{iii}(z, x; T) dz + \int_0^\infty e^{\nu z} \Lambda_\rho^i(z, x; T) dz \\
&\stackrel{\text{lem.A.2.2.}}{=} \int_{-\infty}^0 e^{\nu z} e^{-\rho T} \Lambda_{-\rho}^{ii}(-z, -x; T) dz - \int_{-\infty}^k e^{\nu z} e^{-\rho T} \Lambda_{-\rho}^{ii}(-z, -x; T) dz \\
&\quad + \int_0^\infty e^{\nu z} \Lambda_\rho^i(z, x; T) dz \\
&\stackrel{(u=-z)}{=} e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^{ii}(-\nu, 0, -x; T) - \Psi_{-\rho}^{ii}(-\nu, -k, -x; T)] \\
&\quad + \Psi_\rho^i(\nu, 0, x; T).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\Psi_\rho^{iii}(\nu; k, x, T) &= e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^{ii}(-\nu, 0, -x; T) - \Psi_{-\rho}^{ii}(-\nu, -k, -x; T)] \\
&\quad + \Psi_\rho^i(\nu, 0, x; T).
\end{aligned}$$

- Région iv , $\{x \leq 0, k \leq 0\}$:

$$\begin{aligned}
& \Psi_{\rho}^{iv}(\nu; k, x, T) \\
&= \int_k^{\infty} e^{\nu z} \Lambda_{\rho}(z, x; T) dz \\
&= \int_k^0 e^{\nu z} \Lambda_{\rho}^{iv}(z, x; T) dz + \int_0^{\infty} e^{\nu z} \Lambda_{\rho}^{ii}(z, x; T) dz \\
&\stackrel{\text{lem. A.2.2.}}{=} \int_{-\infty}^0 e^{\nu z} e^{-\rho T} \Lambda_{-\rho}^i(-z, -x; T) dz - \int_{-\infty}^k e^{\nu z} e^{-\rho T} \Lambda_{-\rho}^i(-z, -x; T) dz \\
&\quad + \int_0^{\infty} e^{\nu z} \Lambda_{\rho}^{ii}(z, x; T) dz \\
&\stackrel{(u=-z)}{=} e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^i(-\nu, 0, -x; T) - \Psi_{-\rho}^i(-\nu, -k, -x; T)] \\
&\quad + \Psi_{\rho}^{ii}(\nu, 0, x; T).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\Psi_{\rho}^{iv}(\nu; k, x, T) &= e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^i(-\nu, 0, -x; T) - \Psi_{-\rho}^i(-\nu, -k, -x; T)] \\
&\quad + \Psi_{\rho}^{ii}(\nu, 0, x; T).
\end{aligned} \tag{E.30}$$

Remarque. Le fait que Λ est continue $\forall x, z \in \mathbb{R}$ implique que Ψ est continue $\forall x, k \in \mathbb{R}$.

Remarque. Pour $k = 0$ la fonction $\Psi_{\rho}^i(\nu, 0, 0; T)$ est définie comme $\lim_{k \rightarrow 0} \Psi_{\rho}^i(\nu, k, 0; T)$ et la fonction $\Psi_{\rho}^{ii}(\nu, 0, x; T)$ est définie comme $\lim_{k \rightarrow 0} \Psi_{\rho}^{ii}(\nu, k, x; T)$.

Nous sommes maintenant prêts à calculer le prix initial d'une option escalier exponentielle vers le bas.

Étape 4

• Région i , $\{x \geq 0, k \geq 0\} \Rightarrow \{S_0 \geq b, K \geq b\}$: En insérant (B.26) dans (2.5) nous obtenons le prix au début du contrat suivant,

$$\begin{aligned}
 C_\rho^-(S_0; T, K, b) &= e^{-\gamma T - \nu x} [b \Psi_\rho^i(\nu + \sigma; k, x, T) - K \Psi_\rho^i(\nu; k, x, T)] \\
 &= e^{-\gamma T - \nu x} \left[b \left\{ e^{(\nu + \sigma)x + \frac{(\nu + \sigma)^2 T}{2}} \Phi(d_2) - e^{-(\nu + \sigma)x + \frac{(\nu + \sigma)^2 T}{2}} \Phi(d_4) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-(\nu + \sigma)x} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\frac{(\nu + \sigma)^2 t}{2}} [(\nu + \sigma) \Phi(d_6) + t^{-\frac{1}{2}} \phi(d_6)] dt \right\} \right. \\
 &\quad \left. - K \left\{ e^{\nu x + \frac{\nu^2 T}{2}} \Phi(d_1) - e^{-\nu x + \frac{\nu^2 T}{2}} \Phi(d_3) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-\nu x} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\frac{\nu^2 t}{2}} [\nu \Phi(d_5) + t^{-\frac{1}{2}} \phi(d_5)] dt \right\} \right].
 \end{aligned}$$

En utilisant les équations (B.24) et (B.25), avec l'identité $\phi(d_5) = \frac{b^2 \phi(d_6) e^{rt}}{S_0 K}$ et quelques manipulations algébriques simples nous obtenons le prix au début du contrat suivant,

$$\begin{aligned}
 C_\rho^-(S_0; T, K, b) &= S_0 \Phi(d_2) - K e^{-rT} \Phi(d_1) - \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \left[\left(\frac{b^2}{S_0} \right) \Phi(d_4) - K e^{-rT} \Phi(d_3) \right] \\
 &\quad + \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2\nu}{\sigma}} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{-\gamma(T-t)}}{\rho \sqrt{2\pi(T-t)^3}} \\
 &\quad \cdot \left[(\nu + \sigma) \left(\frac{b^2}{S_0} \right) \Phi(d_6) - \nu e^{-rT} K \Phi(d_5) \right] dt. \tag{B.31}
 \end{aligned}$$

Remarque. La partie *vert* de (B.30) est le prix d'une option barrière d'achat vers le bas. De plus, il est facile de voir que lorsque $\rho \rightarrow \infty$, $C_\rho^-(S; T, K, b)$ converge vers le prix d'une option d'achat vers le bas standard, qui est ce que nous attendions. Si $\rho \rightarrow \infty$ alors le prix de l'option est nul au moment où l'actif sous-jacent touche la barrière, exactement comme une option barrière standard.

Remarque. Nous pouvons vérifier (avec une intégration longue, mais facile) que lorsque $\rho \rightarrow 0$, $C_\rho^-(S; T, K, b)$ converge vers le prix d'une option d'achat standard,

$S_0\Phi(d_2) - Ke^{-rT}\Phi(d_1)$, qui est ce que nous attendions; quand $\rho \rightarrow 0$ la barrière n'a aucun effet sur le prix de l'option.

• Région *ii*, $\{x \leq 0, k \geq 0\} \Rightarrow \{S_0 \leq b, K \geq b\}$: En insérant (B.27) dans (2.5) nous obtenons le prix au début du contrat,

$$\begin{aligned} C_\rho^-(S_0; T, K, b) &= e^{-\gamma T - \nu x} [b\Psi_\rho^{ii}(\nu + \sigma; k, x, T) - K\Psi_\rho^{ii}(\nu; k, x, T)] \\ &= e^{-\gamma T - \nu x} \left[b \left\{ \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})}{\rho\sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\frac{(\nu+\sigma)^2 t}{2} - \frac{x^2}{2(T-t)}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. [(\nu + \sigma)C_1\Phi(d_8) + C_2\phi(d_8)] dt \right\} \right. \\ &\quad \left. - K \left\{ \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})}{\rho\sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\frac{\nu^2 t}{2} - \frac{x^2}{2(T-t)}} [\nu C_1\Phi(d_7) + C_2\phi(d_7)] dt \right\} \right] \end{aligned}$$

En utilisant les équations (B.24) et (B.25) avec l'identité $\phi(d_7) = \frac{b\phi(d_8)e^{rt}}{K}$ et quelques manipulations algébriques simples nous obtenons le prix au début du contrat,

$$\begin{aligned} C_\rho^-(S_0; T, K, b) &= \left(\frac{b}{S_0}\right)^{\frac{\nu}{\sigma}} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})e^{-\gamma(T-t)}}{\rho\sqrt{2\pi(T-t)^3}} \\ &\quad \cdot \left[(\nu + \sigma)C_3b\Phi(d_8) - \nu C_1e^{-rT}K\Phi(d_7) \right. \\ &\quad \left. - \sigma x t^{-\frac{1}{2}} b\phi(d_8) \right] e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}} dt \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

- Région *iii*, $\{x \geq 0, k \leq 0\} \Rightarrow \{S_0 \geq b, K \leq b\}$:

$$C_\rho^-(S_0; T, K, b) \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\gamma T - \nu x} [b\Psi_\rho^{iii}(\nu + \sigma; k, x, T) - K\Psi_\rho^{iii}(\nu; k, x, T)] \\ &\stackrel{(2.29)}{=} e^{-\gamma T - \nu x} \left[b \left\{ e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^{ii}(-(\nu + \sigma), 0, -x; T) - \Psi_{-\rho}^{ii}(-(\nu + \sigma), -k, -x; T)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Psi_\rho^i(\nu + \sigma, 0, x; T) \right\} \right. \\ &\quad \left. - K \left\{ e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^{ii}(-\nu, 0, -x; T) - \Psi_{-\rho}^{ii}(-\nu, -k, -x; T)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Psi_\rho^i(\nu, 0, x; T) \right\} \right] \quad (\text{B.34}) \end{aligned}$$

- Région *iv*, $\{x \leq 0, k \leq 0\} \Rightarrow \{S_0 \leq b, K \leq b\}$:

$$C_\rho^-(S_0; T, K, b) \quad (\text{B.35})$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\gamma T - \nu x} [b\Psi_\rho^{iv}(\nu + \sigma; k, x, T) - K\Psi_\rho^{iv}(\nu; k, x, T)] \\ &\stackrel{(2.30)}{=} e^{-\gamma T - \nu x} \left[b \left\{ e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^i(-(\nu + \sigma), 0, -x; T) - \Psi_{-\rho}^i(-(\nu + \sigma), -k, -x; T)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Psi_\rho^{ii}(\nu + \sigma, 0, x; T) \right\} \right. \\ &\quad \left. - K \left\{ e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^i(-\nu, 0, -x; T) - \Psi_{-\rho}^i(-\nu, -k, -x; T)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Psi_\rho^{ii}(\nu, 0, x; T) \right\} \right] \quad (\text{B.36}) \end{aligned}$$

Remarque. *Le fait que Ψ est continue $\forall x, z \in \mathbb{R}$ implique que $C_\rho^-(S_0; T, K, b)$ est continue $\forall S_0, b > 0$.*

Ceci termine la démonstration du théorème 2.1.1.

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

APPENDICE C

CHAPITRE 3

C.1 Preuves détaillées de chapitre 3

C.1.1 Lemme 3.1.2.

Si C est une variable aléatoire qui suit une loi de Cauchy(0,1), alors $\frac{1}{1+C^2}$ suit une loi de l'arc-sinus c'est-à-dire, pour $0 < u < 1$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{1+C^2} \leq u\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{u}).$$

Démonstration. Nous allons utiliser les deux identités suivantes :

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \tag{C.1}$$

$$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right). \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{1}{1+C^2} \leq u\right) &= \mathbb{P}\left(C^2 \geq \frac{1-u}{u}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(C \geq \sqrt{\frac{1-u}{u}}\right) + \mathbb{P}\left(C \leq -\sqrt{\frac{1-u}{u}}\right) \\
&= 2\mathbb{P}\left(C \geq \sqrt{\frac{1-u}{u}}\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt{\frac{1-u}{u}}}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{\frac{1-u}{u}}\right) \right] \\
&\stackrel{(A.1)}{=} \frac{2}{\pi} \arctan\left(\sqrt{\frac{u}{1-u}}\right) \\
&\stackrel{(A.2)}{=} \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{\sqrt{\frac{u}{1-u}}}{\sqrt{\frac{u}{1-u}} + 1}\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{u}).
\end{aligned}$$

□

C.1.2 Proposition 3.2.2.

Pour $0 < u < \alpha < 1$ et $b \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B > b, b > M_u^B) = \mathbb{P}\left(u < \theta_1^B < \alpha, \sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > b, b > M_u^B\right).$$

Démonstration. En utilisant (3.2) nous avons que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Q_\alpha^B > b, b > M_u^B) &\stackrel{(3.2)}{=} \mathbb{P}(A_1^{B, -b} < \alpha, b > M_u^B) \\
&\equiv \mathbb{P}\left(\int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s < b)} ds < \alpha, b > M_u^B\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\int_0^{\tau_b^B} \mathbb{I}_{(B_s < b)} ds + \int_{\tau_b^B}^1 \mathbb{I}_{(B_s < b)} ds < \alpha, \tau_b^B < 1, b > M_u^B\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\tau_b^B + \int_{\tau_b^B}^1 \mathbb{I}_{(B_s < b)} ds < \alpha, \tau_b^B < 1, \tau_b^B > u\right), \text{ car } b \geq 0.
\end{aligned}$$

Maintenant, en conditionnant sur τ_b^B , nous avons que,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\tau_b^B + \int_{\tau_b^B}^1 \mathbb{I}_{(B_s < b)} ds < \alpha, \tau_b^B < 1, \tau_b^B > u \right) \\ &= \int_u^1 \mathbb{P} \left(\int_r^1 \mathbb{I}_{(B_s < b)} ds < \alpha - r \right) \mathbb{P}(\tau_b^B \in dr) \\ &= \int_u^\alpha \mathbb{P} \left(\int_r^1 \mathbb{I}_{(B_s < b)} ds < \alpha - r \right) \mathbb{P}(\tau_b^B \in dr), \end{aligned}$$

parce ce que si $r \geq \alpha$ alors $\mathbb{P} \left(\int_r^1 \mathbb{I}_{(B_s < b)} ds < \alpha - r \right) = 0$.

Avec la propriété de Markov, nous avons que

$$\begin{aligned} & \int_u^\alpha \mathbb{P} \left(\int_r^1 \mathbb{I}_{(B_s < b)} ds < \alpha - r \right) \mathbb{P}(\tau_b^B \in dr) \\ &= \int_u^\alpha \mathbb{P} \left(\int_r^1 \mathbb{I}_{(B_s - B_r < 0)} ds < \alpha - r \right) \mathbb{P}(\tau_b^B \in dr) \\ &\stackrel{\text{Markov}}{=} \int_u^\alpha \mathbb{P} \left(\int_0^{1-r} \mathbb{I}_{(B_s^* < 0)} ds < \alpha - r \right) \mathbb{P}(\tau_b^B \in dr) \\ &\equiv \int_u^\alpha \mathbb{P} \left(A_{1-r}^{B^*, -, 0} < \alpha - r \right) \mathbb{P}(\tau_b^B \in dr), \end{aligned}$$

où $B^* = (B_t^*)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard qui est indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_b^B}^B$.

Donc,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B > b, b > M_u^B) = \int_u^\alpha \mathbb{P} \left(A_{1-r}^{B^*, -, 0} < \alpha - r \right) \mathbb{P}(\tau_b^B \in dr).$$

Maintenant en utilisant la **proposition 3.1.1**, nous avons que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Q_\alpha^B > b, b > M_u^B) &= \int_u^\alpha \mathbb{P} \left(A_{1-r}^{B^*, -, 0} < \alpha - r \right) \mathbb{P}(\tau_b^B \in dr) \\ &= \int_u^\alpha \mathbb{P} \left(A_{1-r}^{B^*, +, 0} < \alpha - r \right) \mathbb{P}(\tau_b^B \in dr) \\ &\stackrel{\text{prop.3.1.1}}{=} \int_u^\alpha \mathbb{P} \left(\theta_{1-r}^{B^*} < \alpha - r \right) \mathbb{P}(\tau_b^B \in dr) \\ &= \int_u^\alpha \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq \alpha-r} B_s^* > \sup_{\alpha-r \leq s \leq 1-r} B_s^* \right) \mathbb{P}(\tau_b^B \in dr). \end{aligned}$$

Voir la figure 3.2 pour une illustration de l'égalité des ensembles dans la dernière étape pour une trajectoire fixée.

Encore une fois en utilisant la propriété de Markov, nous avons que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Q_\alpha^B > b, b > M_u^B) &= \int_u^\alpha \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq \alpha-r} B_s^* > \sup_{\alpha-r \leq s \leq 1-r} B_s^*\right) \mathbb{P}(\tau_b^B \in dr) \\
&\stackrel{\text{Markov}}{=} \int_u^\alpha \mathbb{P}\left(\sup_{r \leq s \leq \alpha} B_s > \sup_{\alpha \leq s \leq 1} B_s\right) \mathbb{P}(\tau_b^B \in dr) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{\tau_b^B \leq s \leq \alpha} B_s > \sup_{\alpha \leq s \leq 1} B_s, u < \tau_b^B < \alpha\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > \sup_{\alpha \leq s \leq 1} B_s, u < \tau_b^B < \alpha\right), \text{ car } b \geq 0, \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > \sup_{\alpha \leq s \leq 1} B_s, \sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > b, b > M_u^B\right) \\
&= \mathbb{P}\left(u < \theta_1^B < \alpha, \sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > b, b > M_u^B\right),
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
&\left\{ \sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > \sup_{\alpha \leq s \leq 1} B_s, \sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > b, b > M_u^B \right\} \\
&= \left\{ u < \theta_1^B < \alpha, \sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > b, b > M_u^B \right\}, \tag{C.3}
\end{aligned}$$

(voir la figure C.1 pour une illustration de (C.3) pour une trajectoire fixée)

donc,

$$\mathbb{P}(Q_\alpha^B > b, b > M_u^B) = \mathbb{P}\left(u < \theta_1^B < \alpha, \sup_{u \leq s \leq \alpha} B_s > b, b > M_u^B\right). \tag{C.4}$$

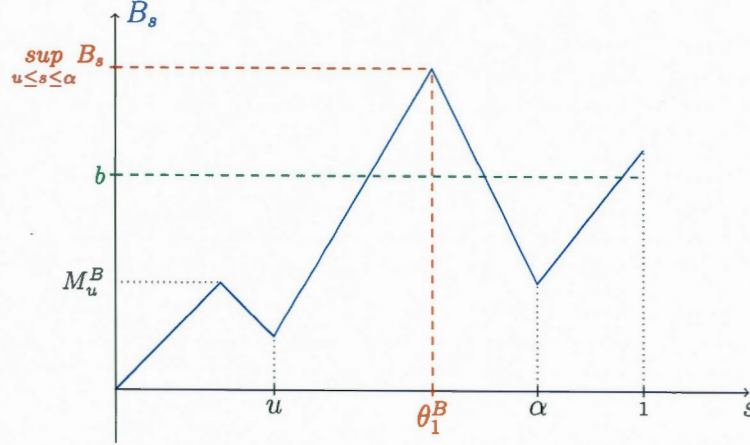
□

C.1.3 Lemme 3.2.4.

Pour $0 < \alpha < 1$,

$$\xi_\alpha^B \stackrel{d}{=} 1 - \eta_\alpha^B$$

Figure C.1 L'équation (C.3) avec une trajectoire fixée.



Démonstration. Pour commencer, nous devons d'abord démontrer l'égalité suivante,

$$Q_\alpha^B \stackrel{d}{=} Q_\alpha^B - B_1. \quad (\text{C.5})$$

En partant de la gauche, nous avons, par définition, que

$$Q_\alpha^{B^*} = \inf \left\{ x : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s^* < x)} ds > \alpha \right\},$$

où $B^* = (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien avec temps inversé c.-à-d. $B_t^* = B_{1-t} - B_t$ pour $t \in [0, 1]$. Cela nous donne que,

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{B^*} &\equiv \inf \left\{ x : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s^* < x)} ds > \alpha \right\} = \inf \left\{ x : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_{1-s} - B_1 < x)} ds > \alpha \right\} \\ &= \inf \left\{ x : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_{1-s} < x + B_1)} ds > \alpha \right\} \stackrel{(y=x+B_1)}{=} \inf \left\{ y - B_1 : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_{1-s} < y)} ds > \alpha \right\} \\ &\stackrel{d}{=} \inf \left\{ y - B_1 : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s < y)} ds > \alpha \right\} = \inf \left\{ y : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s < y)} ds > \alpha \right\} - B_1 \\ &= Q_\alpha^B - B_1 \end{aligned}$$

et, en suivant la même logique, nous avons que,

$$\begin{aligned}
& Q_\alpha^{B^*} - B_1^* \\
& \equiv \inf \left\{ x : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s^* < x)} ds > \alpha \right\} - B_1 \stackrel{d}{=} \inf \left\{ x : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s^* < x)} ds > \alpha \right\} + B_1 \\
& = \inf \left\{ x + B_1 : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s^* < x)} ds > \alpha \right\} \equiv \inf \left\{ x + B_1 : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_{1-s} < x+B_1)} ds > \alpha \right\} \\
& \stackrel{(y=x+B_1)}{=} \inf \left\{ y : \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_{1-s} < y)} ds > \alpha \right\} = \inf \left\{ y \int_0^1 \mathbb{I}_{(B_s < y)} ds > \alpha \right\} \\
& \equiv Q_\alpha^B.
\end{aligned}$$

Donc,

$$Q_\alpha^B \stackrel{d}{=} Q_\alpha^{B^*} - B_1.$$

Maintenant pour démontrer que $\xi_\alpha^B \stackrel{d}{=} 1 - \eta_\alpha^B$, nous allons commencer par le côté gauche. Nous avons, par définition, que

$$\begin{aligned}
& \xi_\alpha^{B^*} \\
& = \sup \{ s \in [0, 1] : B_s^* = Q_\alpha^{B^*} \} = \sup \{ s \in [0, 1] : B_{1-s} - B_1 = Q_\alpha^{B^*} \} \\
& \stackrel{(C.5)}{=} \sup \{ s \in [0, 1] : B_{1-s} - B_1 = Q_\alpha^B - B_1 \} = \sup \{ s \in [0, 1] : B_{1-s} = Q_\alpha^B \} \\
& \stackrel{(r=1-s)}{=} \sup \{ 1 - r \in [0, 1] : B_r = Q_\alpha^B \} = 1 - \inf \{ r \in [0, 1] : B_r = Q_\alpha^B \} \\
& \equiv 1 - \eta_\alpha^B,
\end{aligned}$$

et, en suivant la même logique, nous avons que,

$$\begin{aligned}
& 1 - \eta_\alpha^{B^*} \\
& \equiv 1 - \inf \{ s \in [0, 1] : B_s^* = Q_\alpha^{B^*} \} \equiv 1 - \inf \{ s \in [0, 1] : B_{1-s} - B_1 = Q_\alpha^{B^*} \} \\
& \stackrel{(C.5)}{=} 1 - \inf \{ s \in [0, 1] : B_{1-s} - B_1 = Q_\alpha^B - B_1 \} = 1 - \inf \{ s \in [0, 1] : B_{1-s} = Q_\alpha^B \} \\
& = \sup \{ 1 - s \in [0, 1] : B_{1-s} = Q_\alpha^B \} \stackrel{(r=1-s)}{=} \sup \{ r \in [0, 1] : B_r = Q_\alpha^B \} \\
& = \xi_\alpha^B,
\end{aligned}$$

et donc,

$$\xi_{\alpha}^B \stackrel{d}{=} 1 - \eta_{\alpha}^B.$$

□

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

BIBLIOGRAPHIE

- Akahori, J. (1995). Some formulae for a new type of path-dependent option. *The Annals of Applied Probability*, 5, 383–388.
- Ballotta, L. (2002). *Financial Engineering, E-commerce and Supply Chain*, 75–87. Kluwer Academic Publishers.
- Ballotta, L. et Kyprianou, A. E. (2001). A note on the α -quantile option. *Applied Mathematical Finance*, 8, 137–144.
- Bermin, H.-P., Buchen, P. et Konstandatos, O. (2008). Two exotic lookback options. *Applied Mathematical Finance*, 15 :4, 387–402.
- Billingsley, P. (1999). *Convergence of Probability Measures* (2 éd.). John Wiley & Sons.
- Black, F. et Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81, 637–654.
- Conze, A. et Viswanathan, R. (1991). Path dependent options, the case of look-back options. *The Journal of Finance*, 46, 1893–1907.
- Dassios, A. (1995). The distribution of the quantile of a Brownian motion with drift and the pricing of related path-dependent options. *The Annals of Applied Probability*, 5, 389–398.
- Dassios, A. (1996). Sample quantiles of stochastic processes with stationary and independent increments. *The Annals of Applied Probability*, 6, 1041–1043.
- Dassios, A. (2005). On the quantiles of Brownian motion and their hitting times. *Bernoulli*, 11, 29–36.
- Dassios, A. (2006). Quantiles of Levy processes and applications in finance. London School of Economics and Political Science.
- Davydov, D. et Linetsky, V. (2002). Structuring, pricing and hedging double-barrier step options. *Journal of Computational Finance*, 5, 55–87.
- Dyke, P. (2004). *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*. Springer-Verlag London Limited.

- Embrechts, P., Rogers, L. C. G. et Yor, M. (1995). A proof of Dassios' representation of the alpha-quantile of Brownian motion with drift. *The Annals of Applied Probability*, 5, 757–767.
- Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 1. John Wiley & Sons.
- Fujita, T. (2000). A note on the joint distribution of α, β -percentiles and its application to the option pricing. *Asia-Pacific Financial Markets*, 7, 339–344.
- Fusai, G. (2000a). *Applications of Laplace Transform for Evaluating Occupation Time Options and Other Derivatives*. (Thèse de doctorat). University of Warwick.
- Fusai, G. (2000b). Corridor options and arc-sine law. *The Annals of Applied Probability*, 10, 634–663.
- Harrison, M. J. et Pliska, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11, 215–260.
- Heynen, R. C. et Kat, H. M. (1995). Lookback options with discrete and partial monitoring of the underlying price. *Applied Mathematical Finance*, 2, 273–284.
- Jeanblanc, M., Yor, M. et Chesney, M. (2009). *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer-Verlag London Limited.
- Kanwal, R. P. (2004). *Generalized Functions* (3 éd.). Birkhäuser Boston.
- Karatzas, I. et Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag.
- Linetsky, V. (1999). Step options. *Mathematical Finance*, 9, 55–96.
- Mandelbrot, B. (1995). The Paul Levy I knew. Dans *Lecture Notes in Physics*, IV–XII. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Miura, R. (1992). A note on look-back options based on order statistics. *Hitotsubashi Journal of Commerce and Management*, 27, 15–28.
- Pechtl, A. (1999a). Distribution of occupation times of Brownian motion with drift. *Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences*, 3, 41–62.
- Pechtl, A. (1999b). Some applications of occupation times of Brownian motion with drift in mathematical finance. *Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences*, 3, 63–73.

- Port, S. C. (1963). An elementary probability approach to fluctuation theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 6, 109–151.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models*. Springer Science+Business Media.
- Vergote, O. (2008). Quantile-based estimation of volatility. K.U.Leuven.
- Wendel, J. G. (1960). Order statistics of partial sums. *The Annals of Mathematical Statistics*, 31, 1034–1044.